

PSEUDO-TRIANGULACIONES Y GRAFOS PLANOS

David Orden

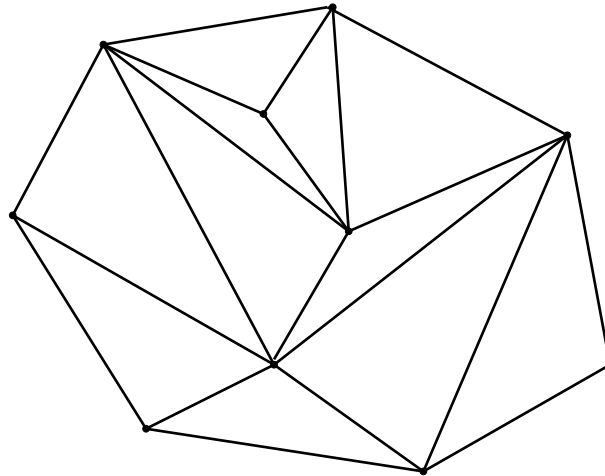
Universidad de Alcalá de Henares,

david.orden@uah.es

<http://www2.uah.es/ordend>

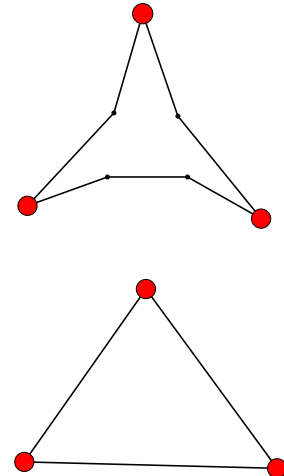
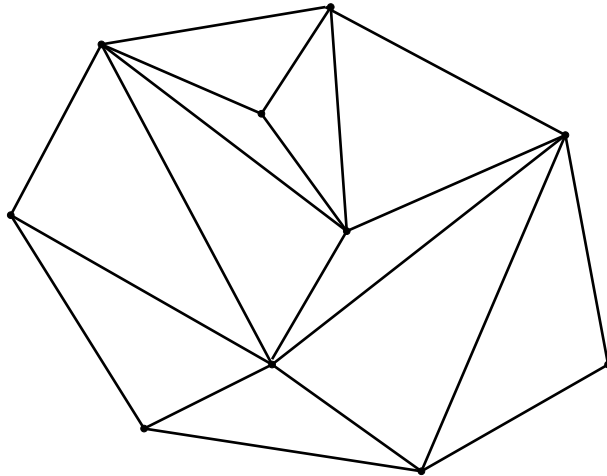
PRELIMINARES

- **Triangulación:** grafo geométrico sin cruces, de vértices \mathbf{A} , que subdivide $\text{conv}(\mathbf{A})$ en triángulos.



PRELIMINARES

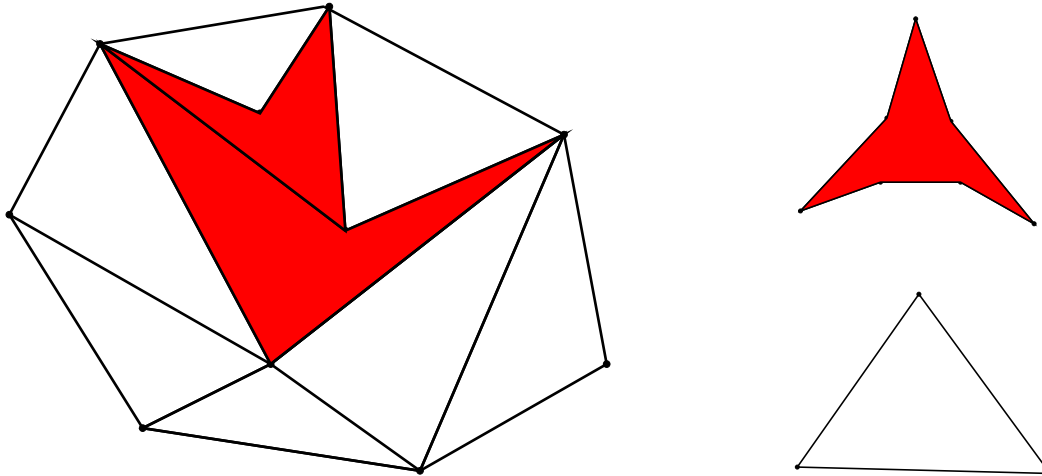
- **Triangulación:** grafo geométrico sin cruces, de vértices \mathbf{A} , que subdivide $\text{conv}(\mathbf{A})$ en triángulos.



- **Pseudo-triángulo:** polígono plano con exactamente tres vértices (**esquinas**) de ángulo interno $< \pi$

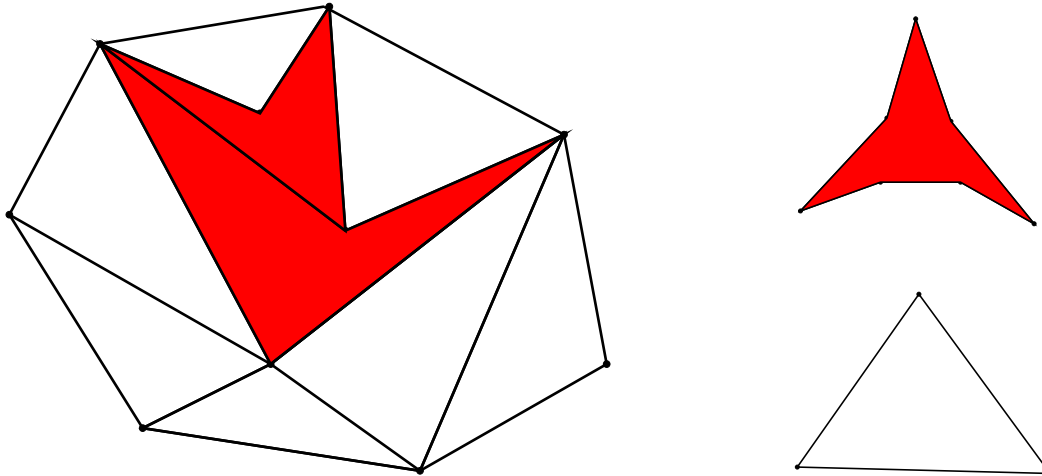
PRELIMINARES

- **Pseudo-triangulación:** grafo geométrico sin cruces, de vértices \mathbf{A} , que subdivide $\text{conv}(\mathbf{A})$ en **pseudo-triángulos**.



PRELIMINARES

- **Pseudo-triangulación:** grafo geométrico sin cruces, de vértices \mathbf{A} , que subdivide $\text{conv}(\mathbf{A})$ en **pseudo-triángulos**.



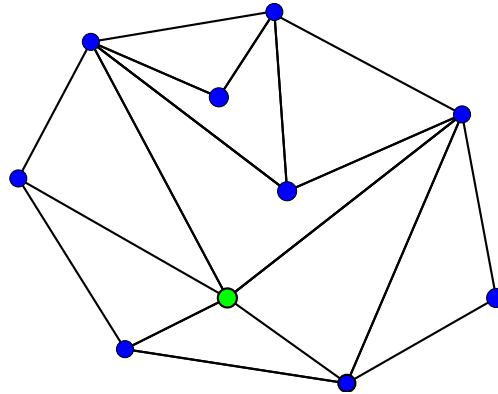
- Triangulación \implies Pseudo-triangulación.

PRELIMINARES

- Triangulación \equiv Grafo maximal sin cruces \implies Pseudo-triangulación máxima.

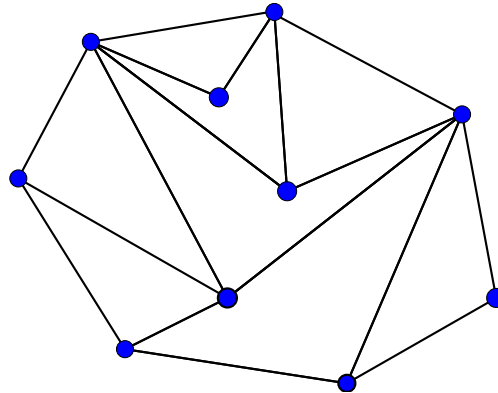
PRELIMINARES

- Triangulación \equiv Grafo maximal sin cruces \implies Pseudo-triangulación máxima.
- ¿Pseudo-triangulación mínima?
 - ★ Un vértice es **puntiagudo** si tiene un ángulo incidente $> \pi$.



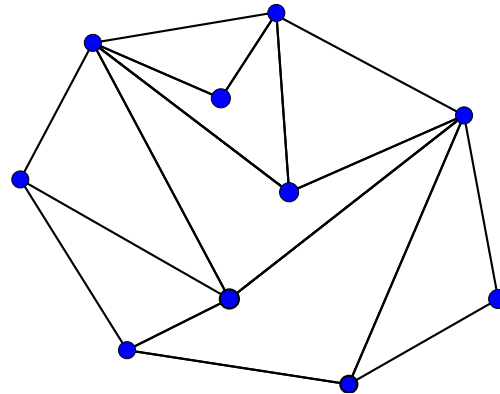
PRELIMINARES

- Triangulación \equiv Grafo maximal sin cruces \implies Pseudo-triangulación máxima.
- ¿Pseudo-triangulación mínima?
 - ★ Un vértice es **puntiagudo** si tiene un ángulo incidente $> \pi$.



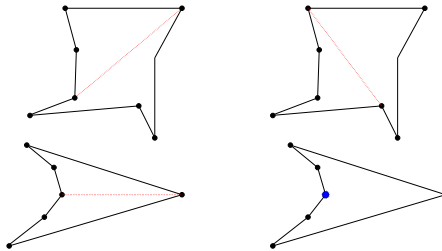
PRELIMINARES

- Triangulación \equiv Grafo maximal sin cruces \implies Pseudo-triangulación máxima.
- ¿Pseudo-triangulación mínima?
 - ★ Un vértice es **puntiagudo** si tiene un ángulo incidente $> \pi$.



- ★ Pseudo-triangulación **puntiaguda**: Todos los vértices puntiagudos.

PROPIEDADES



PROPIEDADES

- Para $n_\gamma := n^\circ$ de vértices no puntiagudos:

- ★ Número de aristas = $2n - 3 + n_\gamma$

PROPIEDADES

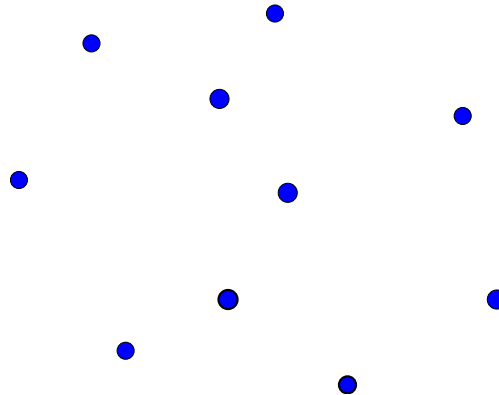
- Para $n_\gamma := n^\circ$ de vértices no puntiagudos:
 - ★ Número de aristas = $2n - 3 + n_\gamma$
 - ★ Número de pseudo-triángulos = $n - 2 + n_\gamma$

PROPIEDADES

- Para $n_\gamma := n^\circ$ de vértices no puntiagudos:
 - ★ Número de aristas = $2n - 3 + n_\gamma$
 - ★ Número de pseudo-triángulos = $n - 2 + n_\gamma$
- Grafos maximales sin cruces y puntiagudos \Leftrightarrow pseudo-triangulaciones puntiagudas.

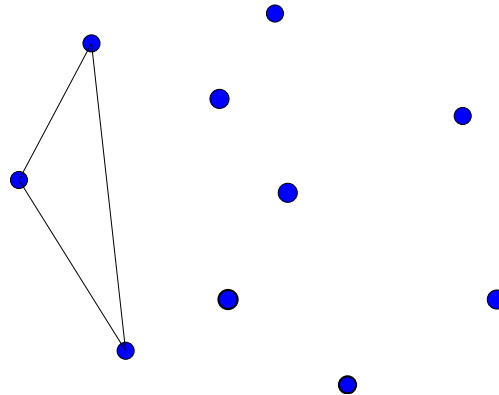
PROPIEDADES

- Para $n_\gamma := n^\circ$ de vértices no puntiagudos:
 - ★ Número de aristas = $2n - 3 + n_\gamma$
 - ★ Número de pseudo-triángulos = $n - 2 + n_\gamma$
- Grafos maximales sin cruces y puntiagudos \Leftrightarrow pseudo-triangulaciones puntiagudas.
- Todo conjunto de puntos admite una pseudo-triangulación puntiaguda.



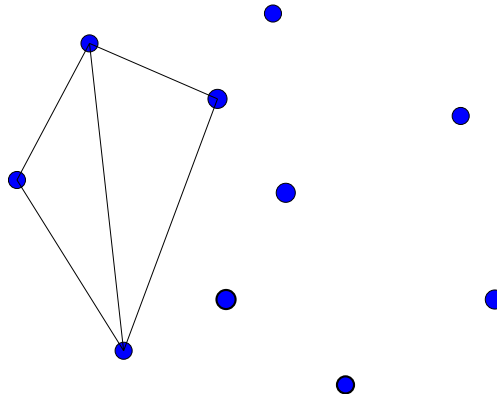
PROPIEDADES

- Para $n_\gamma := n^\circ$ de vértices no puntiagudos:
 - ★ Número de aristas = $2n - 3 + n_\gamma$
 - ★ Número de pseudo-triángulos = $n - 2 + n_\gamma$
- Grafos maximales sin cruces y puntiagudos \Leftrightarrow pseudo-triangulaciones puntiagudas.
- Todo conjunto de puntos admite una pseudo-triangulación puntiaguda.



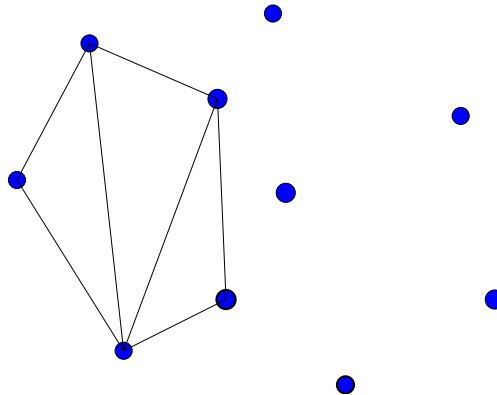
PROPIEDADES

- Para $n_\gamma := n^\circ$ de vértices no puntiagudos:
 - ★ Número de aristas = $2n - 3 + n_\gamma$
 - ★ Número de pseudo-triángulos = $n - 2 + n_\gamma$
- Grafos maximales sin cruces y puntiagudos \Leftrightarrow pseudo-triangulaciones puntiagudas.
- Todo conjunto de puntos admite una pseudo-triangulación puntiaguda.



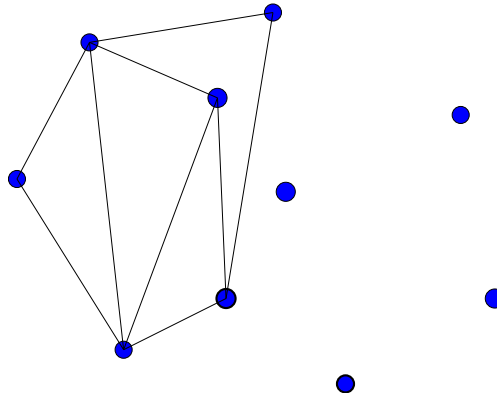
PROPIEDADES

- Para $n_\gamma := n^\circ$ de vértices no puntiagudos:
 - ★ Número de aristas = $2n - 3 + n_\gamma$
 - ★ Número de pseudo-triángulos = $n - 2 + n_\gamma$
- Grafos maximales sin cruces y puntiagudos \Leftrightarrow pseudo-triangulaciones puntiagudas.
- Todo conjunto de puntos admite una pseudo-triangulación puntiaguda.



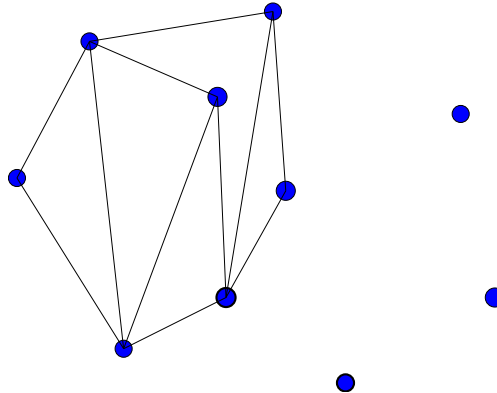
PROPIEDADES

- Para $n_\gamma := n^\circ$ de vértices no puntiagudos:
 - ★ Número de aristas = $2n - 3 + n_\gamma$
 - ★ Número de pseudo-triángulos = $n - 2 + n_\gamma$
- Grafos maximales sin cruces y puntiagudos \Leftrightarrow pseudo-triangulaciones puntiagudas.
- Todo conjunto de puntos admite una pseudo-triangulación puntiaguda.



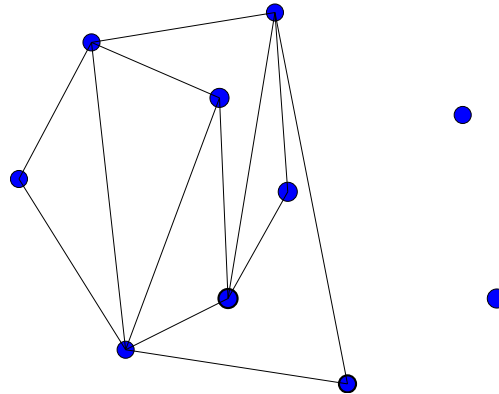
PROPIEDADES

- Para $n_\gamma := n^\circ$ de vértices no puntiagudos:
 - ★ Número de aristas = $2n - 3 + n_\gamma$
 - ★ Número de pseudo-triángulos = $n - 2 + n_\gamma$
- Grafos maximales sin cruces y puntiagudos \Leftrightarrow pseudo-triangulaciones puntiagudas.
- Todo conjunto de puntos admite una pseudo-triangulación puntiaguda.



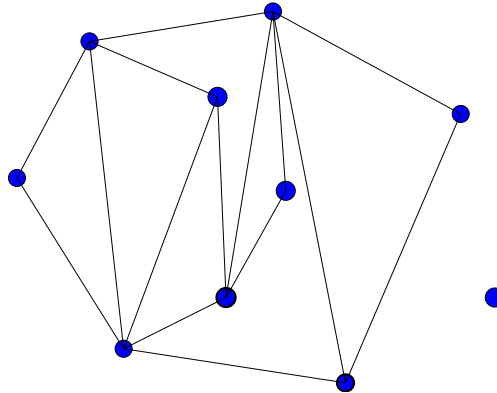
PROPIEDADES

- Para $n_\gamma := n^\circ$ de vértices no puntiagudos:
 - ★ Número de aristas = $2n - 3 + n_\gamma$
 - ★ Número de pseudo-triángulos = $n - 2 + n_\gamma$
- Grafos maximales sin cruces y puntiagudos \Leftrightarrow pseudo-triangulaciones puntiagudas.
- Todo conjunto de puntos admite una pseudo-triangulación puntiaguda.



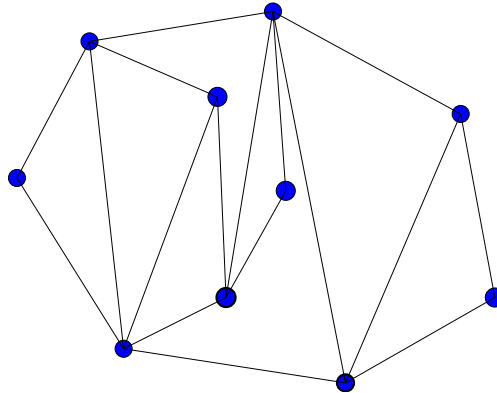
PROPIEDADES

- Para $n_\gamma := n^\circ$ de vértices no puntiagudos:
 - ★ Número de aristas = $2n - 3 + n_\gamma$
 - ★ Número de pseudo-triángulos = $n - 2 + n_\gamma$
- Grafos maximales sin cruces y puntiagudos \Leftrightarrow pseudo-triangulaciones puntiagudas.
- Todo conjunto de puntos admite una pseudo-triangulación puntiaguda.



PROPIEDADES

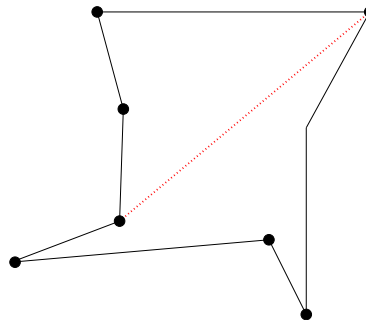
- Para $n_\gamma := n^\circ$ de vértices no puntiagudos:
 - ★ Número de aristas = $2n - 3 + n_\gamma$
 - ★ Número de pseudo-triángulos = $n - 2 + n_\gamma$
- Grafos maximales sin cruces y puntiagudos \Leftrightarrow pseudo-triangulaciones puntiagudas.
- Todo conjunto de puntos admite una pseudo-triangulación puntiaguda.



PROPIEDADES

- **Flips:**

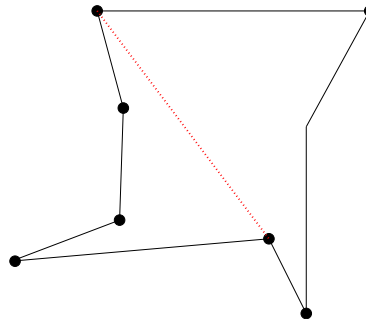
★ Arista \leftrightarrow arista (diagonales de un pseudo-cuadrilátero):



PROPIEDADES

- Flips:

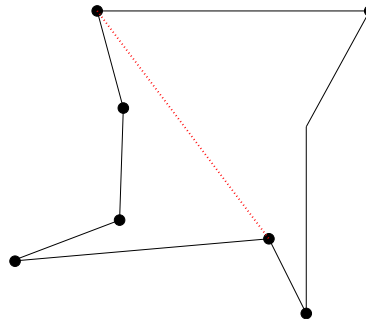
★ Arista \leftrightarrow arista (diagonales de un pseudo-cuadrilátero):



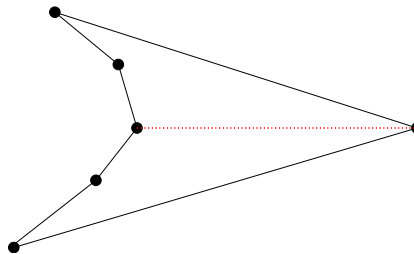
PROPIEDADES

- **Flips:**

- ★ Arista \leftrightarrow arista (diagonales de un pseudo-cuadrilátero):



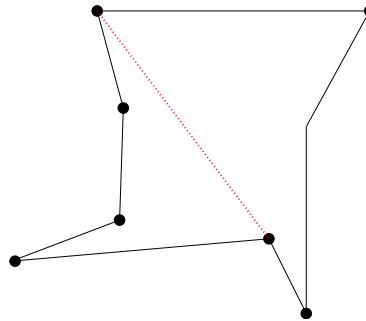
- ★ Arista \leftrightarrow vértice puntiagudo:



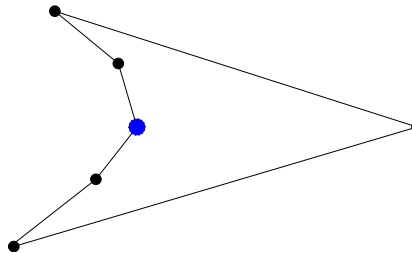
PROPIEDADES

- **Flips:**

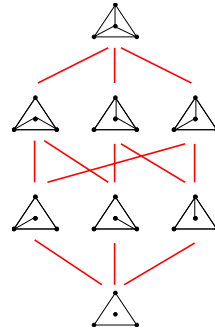
- ★ Arista \leftrightarrow arista (diagonales de un pseudo-cuadrilátero):



- ★ Arista \leftrightarrow vértice puntiagudo:



GRAFOS SIN CRUCES



GRAFOS SIN CRUCES

- Dado un A conjunto de n puntos en el plano, es natural preguntarse por los grafos sin cruces entre ellos:

GRAFOS SIN CRUCES

- Dado un A conjunto de n puntos en el plano, es natural preguntarse por los grafos sin cruces entre ellos:
 - ★ ¿Cuántos hay?

GRAFOS SIN CRUCES

- Dado un A conjunto de n puntos en el plano, es natural preguntarse por los grafos sin cruces entre ellos:

★ ¿Cuántos hay?

[Flajolet-Noy'99] $\Theta((6 + 4\sqrt{2})^n n^{-3/2})$. Fórmulas explícitas para cada n .

GRAFOS SIN CRUCES

- Dado un A conjunto de n puntos en el plano, es natural preguntarse por los grafos sin cruces entre ellos:
 - ★ ¿Cuántos hay?
 - [Flajolet-Noy'99] $\Theta((6 + 4\sqrt{2})^n n^{-3/2})$. Fórmulas explícitas para cada n .
 - ★ ¿Qué estructura tienen?

GRAFOS SIN CRUCES

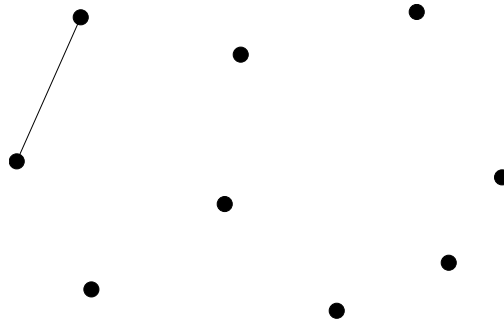
- Dado un A conjunto de n puntos en el plano, es natural preguntarse por los grafos sin cruces entre ellos:

★ ¿Cuántos hay?

[Flajolet-Noy'99] $\Theta((6 + 4\sqrt{2})^n n^{-3/2})$. Fórmulas explícitas para cada n .

★ ¿Qué estructura tienen?

Con la inclusión forman un **poset** (conjunto parcialmente ordenado).



GRAFOS SIN CRUCES

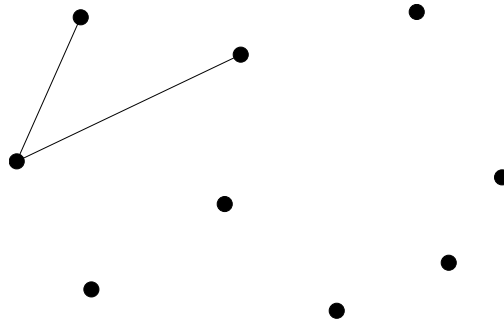
- Dado un A conjunto de n puntos en el plano, es natural preguntarse por los grafos sin cruces entre ellos:

★ ¿Cuántos hay?

[Flajolet-Noy'99] $\Theta((6 + 4\sqrt{2})^n n^{-3/2})$. Fórmulas explícitas para cada n .

★ ¿Qué estructura tienen?

Con la inclusión forman un **poset** (conjunto parcialmente ordenado).



GRAFOS SIN CRUCES

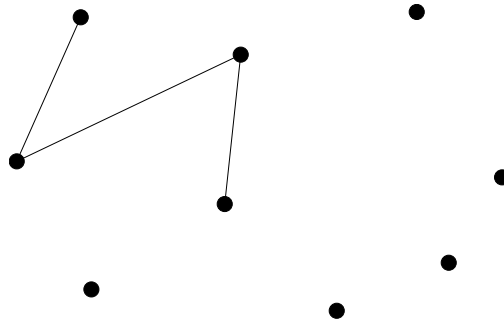
- Dado un A conjunto de n puntos en el plano, es natural preguntarse por los grafos sin cruces entre ellos:

★ ¿Cuántos hay?

[Flajolet-Noy'99] $\Theta((6 + 4\sqrt{2})^n n^{-3/2})$. Fórmulas explícitas para cada n .

★ ¿Qué estructura tienen?

Con la inclusión forman un **poset** (conjunto parcialmente ordenado).



GRAFOS SIN CRUCES

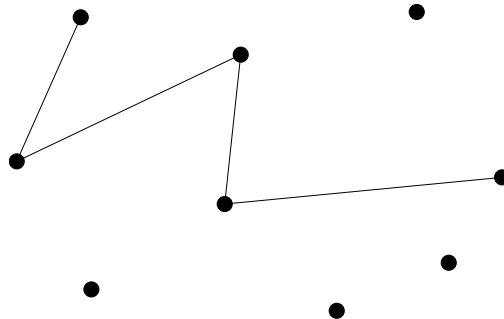
- Dado un A conjunto de n puntos en el plano, es natural preguntarse por los grafos sin cruces entre ellos:

★ ¿Cuántos hay?

[Flajolet-Noy'99] $\Theta((6 + 4\sqrt{2})^n n^{-3/2})$. Fórmulas explícitas para cada n .

★ ¿Qué estructura tienen?

Con la inclusión forman un **poset** (conjunto parcialmente ordenado).



GRAFOS SIN CRUCES

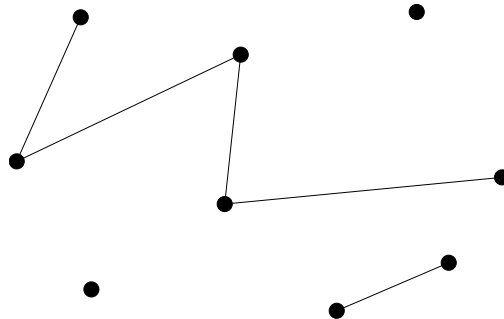
- Dado un A conjunto de n puntos en el plano, es natural preguntarse por los grafos sin cruces entre ellos:

★ ¿Cuántos hay?

[Flajolet-Noy'99] $\Theta((6 + 4\sqrt{2})^n n^{-3/2})$. Fórmulas explícitas para cada n .

★ ¿Qué estructura tienen?

Con la inclusión forman un **poset** (conjunto parcialmente ordenado).



GRAFOS SIN CRUCES

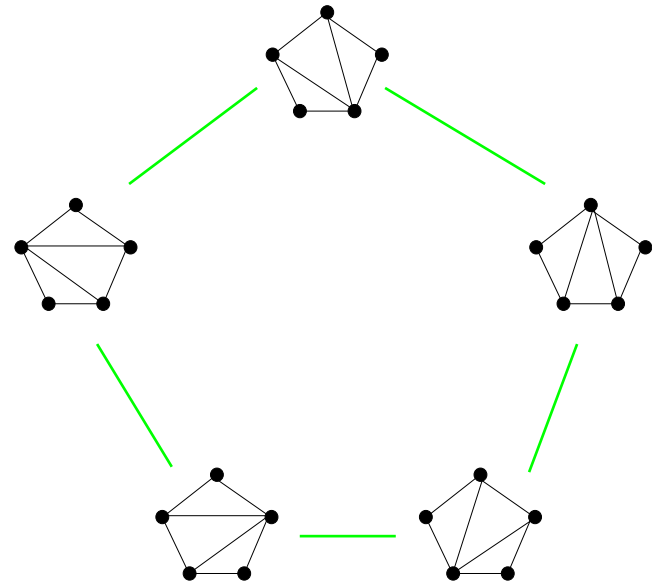
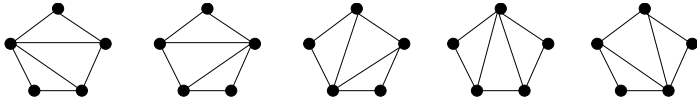
- Posición convexa:

{ Grafos planos usando el borde } \xleftrightarrow{inv} { Caras del *asociaedro* }

GRAFOS SIN CRUCES

- Posición convexa:

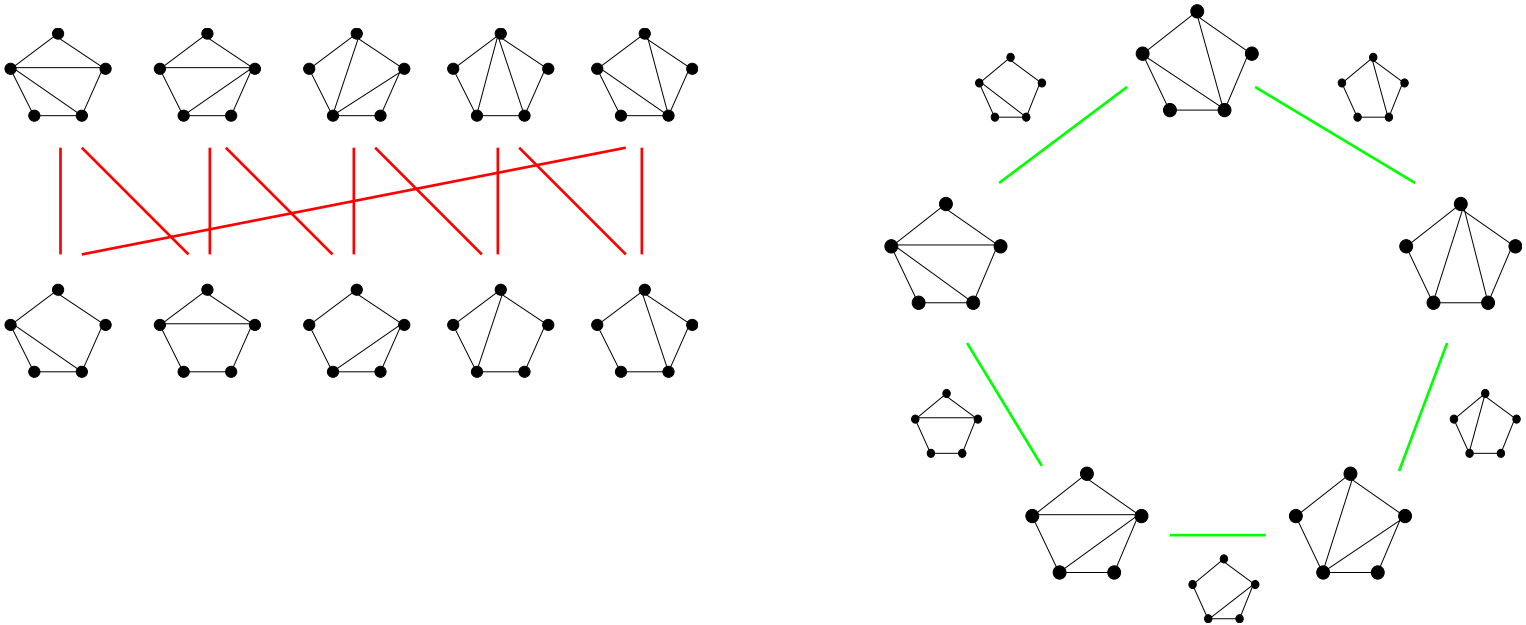
{ Grafos planos usando el borde } \xleftrightarrow{inv} { Caras del *asociaedro* }



GRAFOS SIN CRUCES

- Posición convexa:

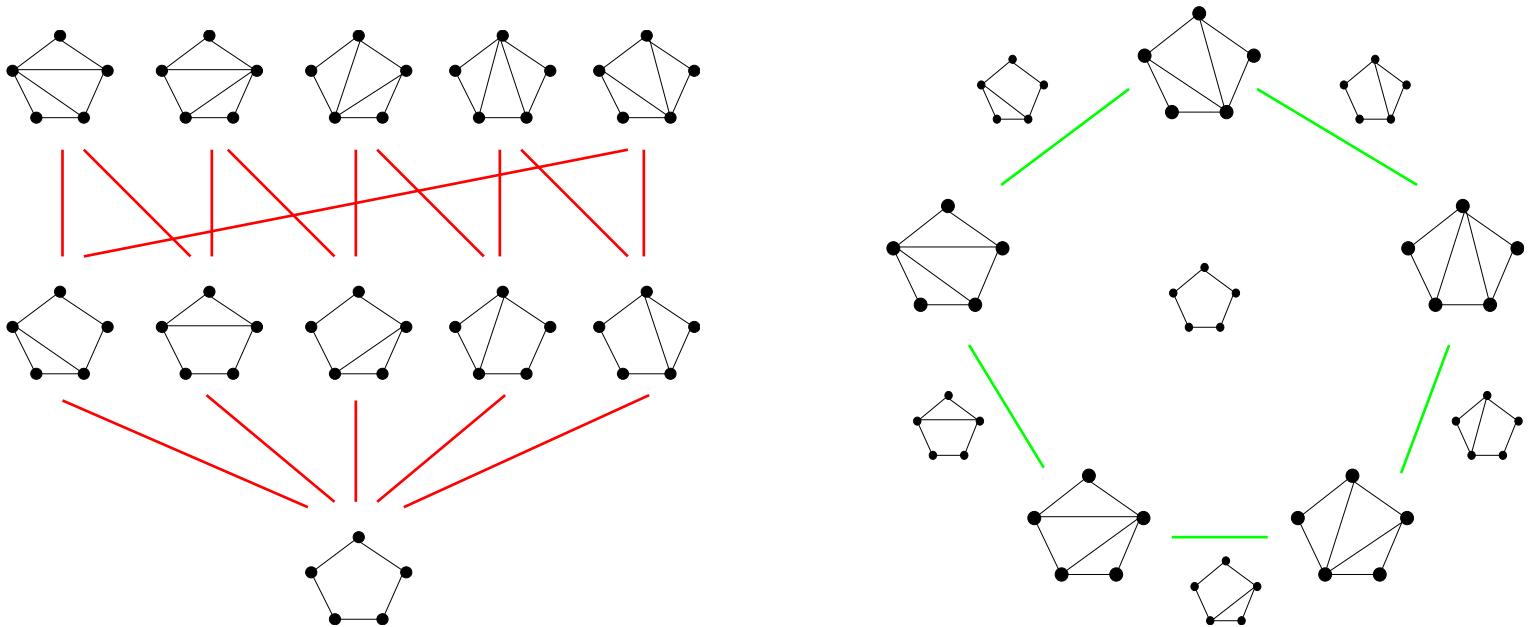
{ Grafos planos usando el borde } \xleftrightarrow{inv} { Caras del *asociaedro* }



GRAFOS SIN CRUCES

- Posición convexa:

{ Grafos planos usando el borde } \xleftrightarrow{inv} { Caras del *asociaedro* }



GRAFOS SIN CRUCES

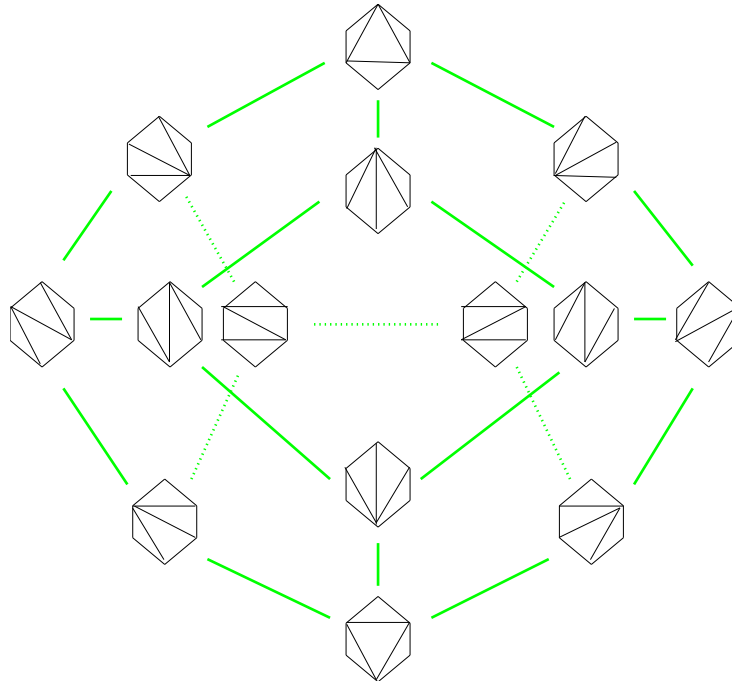
- Posición convexa:

- ★ El grafo de flips entre triangulaciones es regular de grado $n - 3$.

GRAFOS SIN CRUCES

- Posición convexa:

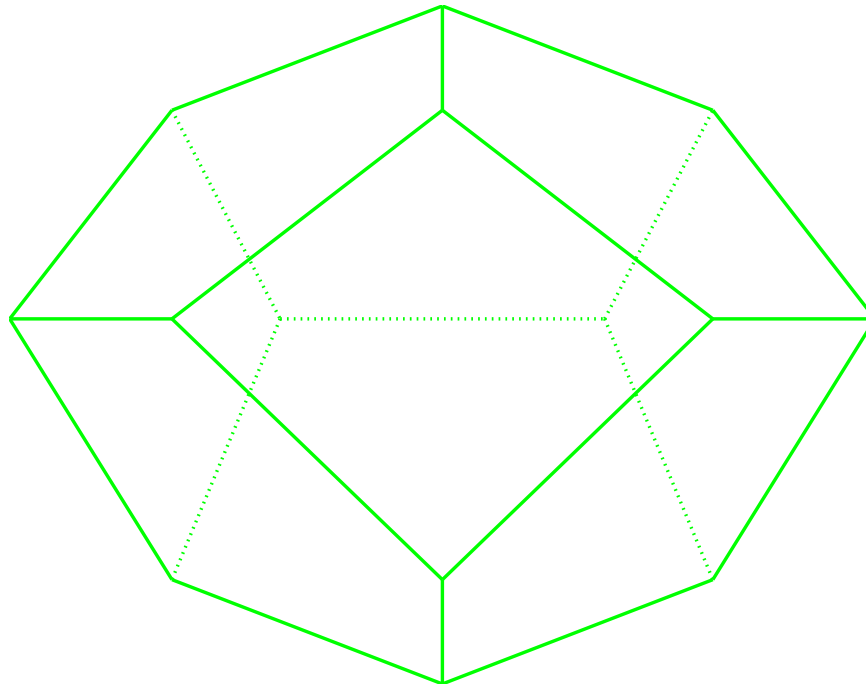
- ★ El grafo de flips entre triangulaciones es regular de grado $n - 3$.
- ★ La dimensión del asociaedro es $n - 3$.



GRAFOS SIN CRUCES

- Posición convexa:

- ★ El grafo de flips entre triangulaciones es regular de grado $n - 3$.
- ★ La dimensión del asociaedro es $n - 3$.



GRAFOS SIN CRUCES

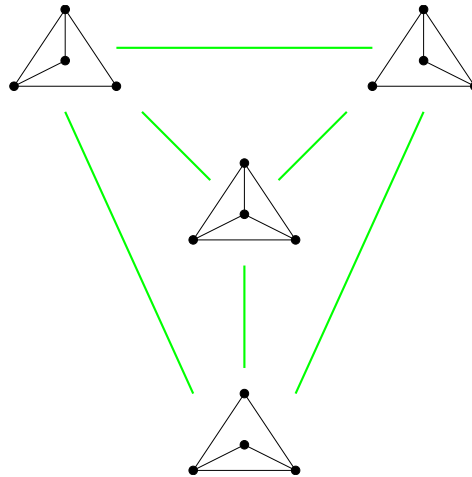
- Posición GENERAL:

- ★ El grafo de flips entre **pseudo**-triangulaciones es regular de grado $n - 3 + 2n_i$.

GRAFOS SIN CRUCES

- Posición GENERAL:

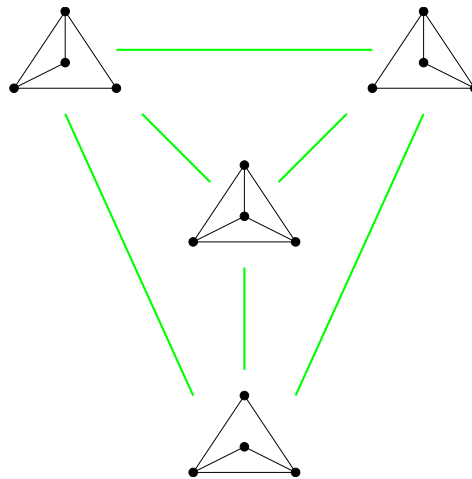
★ El grafo de flips entre **pseudo**-triangulaciones es regular de grado $n - 3 + 2n_i$.



GRAFOS SIN CRUCES

- Posición GENERAL:

★ El grafo de flips entre **pseudo-triangulaciones** es regular de grado $n - 3 + 2n_i$.



¿Existe el correspondiente politopo de dimensión $n - 3 + 2n_i$?

GRAFOS SIN CRUCES

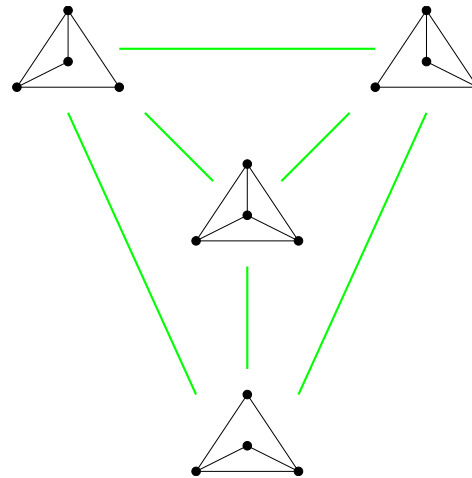
[Orden-Santos'02] Para \mathcal{A} conjunto de n puntos en \mathbb{R}^2 , existe un politopo $Y_{\mathcal{A}}$ tal que:

- $\dim(Y_{\mathcal{A}}) = n - 3 + 2n_i$, 1-esqueleto \equiv flips entre pseudo-triangulaciones.

GRAFOS SIN CRUCES

[Orden-Santos'02] Para A conjunto de n puntos en \mathbb{R}^2 , existe un politopo Y_A tal que:

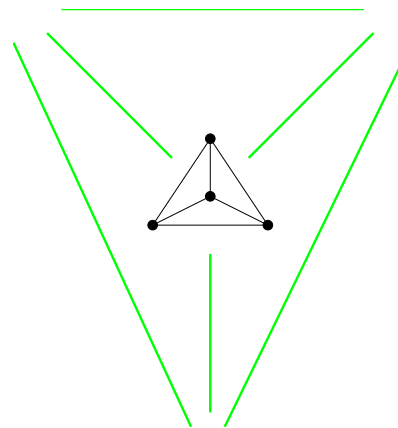
- $\dim(Y_A) = n - 3 + 2n_i$, 1-esqueleto \equiv flips entre pseudo-triangulaciones.
- Las pseudo-triangulaciones puntiagudas forman una cara F tal que:
 $\{\text{Grafos planos usando el borde}\} \xleftrightarrow{inv} \{\text{Caras de } Y(A)\} \setminus \text{star}(F)$



GRAFOS SIN CRUCES

[Orden-Santos'02] Para A conjunto de n puntos en \mathbb{R}^2 , existe un politopo Y_A tal que:

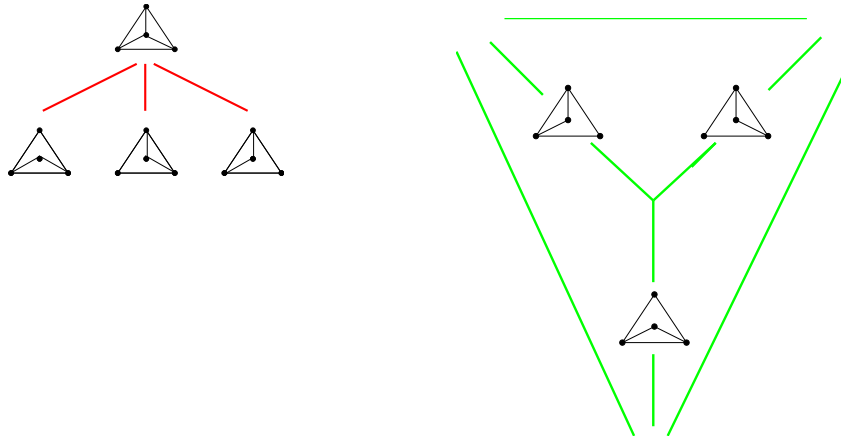
- $\dim(Y_A) = n - 3 + 2n_i$, 1-esqueleto \equiv flips entre pseudo-triangulaciones.
- Las pseudo-triangulaciones puntiagudas forman una cara F tal que:
 $\{\text{Grafos planos usando el borde}\} \xleftrightarrow{inv} \{\text{Caras de } Y(A)\} \setminus \text{star}(F)$



GRAFOS SIN CRUCES

[Orden-Santos'02] Para A conjunto de n puntos en \mathbb{R}^2 , existe un politopo Y_A tal que:

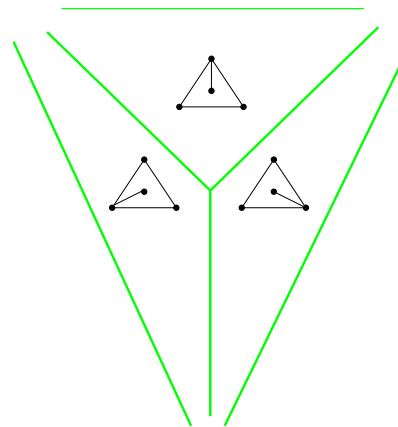
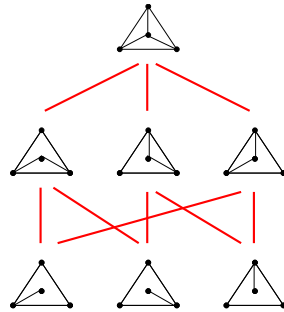
- $\dim(Y_A) = n - 3 + 2n_i$, 1-esqueleto \equiv flips entre pseudo-triangulaciones.
- Las pseudo-triangulaciones puntiagudas forman una cara F tal que:
 $\{\text{Grafos planos usando el borde}\} \xleftrightarrow{inv} \{\text{Caras de } Y(A)\} \setminus \text{star}(F)$



GRAFOS SIN CRUCES

[Orden-Santos'02] Para A conjunto de n puntos en \mathbb{R}^2 , existe un politopo Y_A tal que:

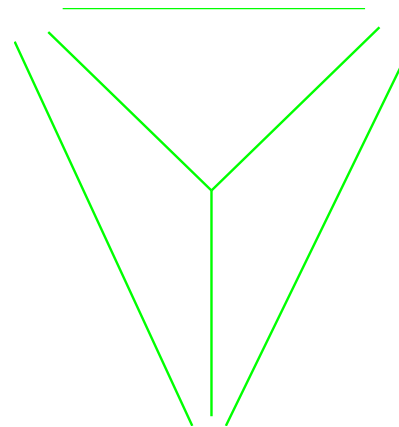
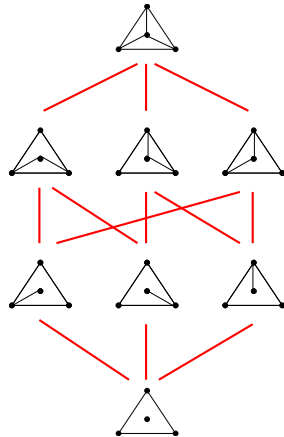
- $\dim(Y_A) = n - 3 + 2n_i$, 1-esqueleto \equiv flips entre pseudo-triangulaciones.
- Las pseudo-triangulaciones puntiagudas forman una cara F tal que:
 $\{\text{Grafos planos usando el borde}\} \xleftrightarrow{inv} \{\text{Caras de } Y(A)\} \setminus \text{star}(F)$



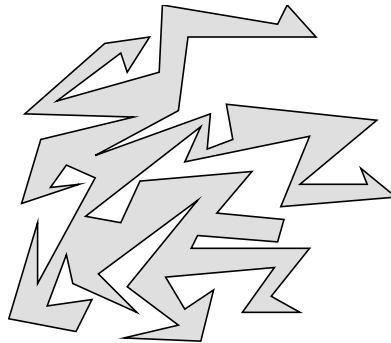
GRAFOS SIN CRUCES

[Orden-Santos'02] Para A conjunto de n puntos en \mathbb{R}^2 , existe un politopo Y_A tal que:

- $\dim(Y_A) = n - 3 + 2n_i$, 1-esqueleto \equiv flips entre pseudo-triangulaciones.
- Las pseudo-triangulaciones puntiagudas forman una cara F tal que:
 $\{\text{Grafos planos usando el borde}\} \xleftrightarrow{inv} \{\text{Caras de } Y(A)\} \setminus \text{star}(F)$

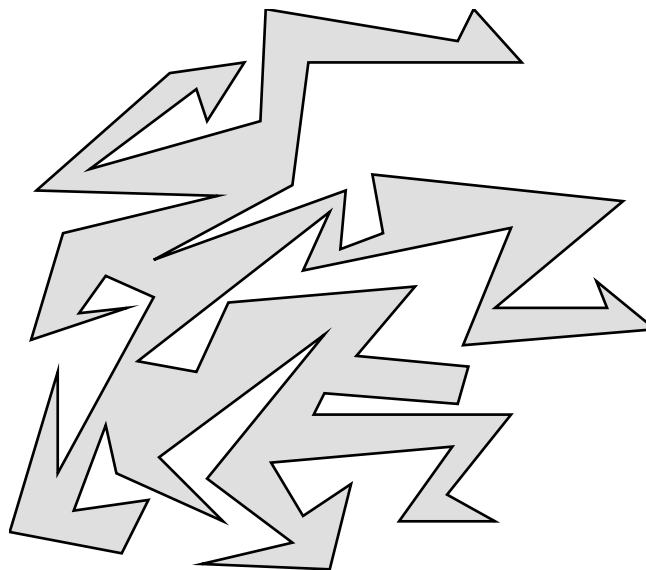


REGLA DEL CARPINTERO



REGLA DEL CARPINTERO

- **Problema:** Dado cualquier polígono simple en \mathbb{R}^2 ,
¿puede desplegarse (sin auto-intersecciones) a posición convexa?



REGLA DEL CARPINTERO

[Streinu'00] [Connelly-Demaine-Rote'00] Sí, se puede.

REGLA DEL CARPINTERO

[Streinu'00] [Connelly-Demaine-Rote'00] Sí, se puede.

- Ideas clave:

1. Los movimientos *expansivos* no generan auto-intersecciones.

REGLA DEL CARPINTERO

[Streinu'00] [Connelly-Demaine-Rote'00] Sí, se puede.

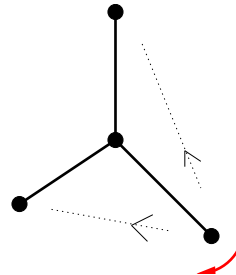
- Ideas clave:

1. Los movimientos *expansivos* no generan auto-intersecciones.
2. Todo polígono en \mathbb{R}^2 tiene un movimiento expansivo.

REGLA DEL CARPINTERO

[Streinu'00] [Connelly-Demaine-Rote'00] Sí, se puede.

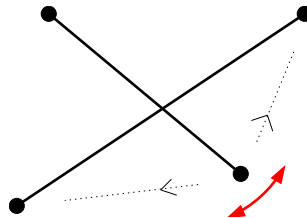
- Ideas clave:
 1. Los movimientos *expansivos* no generan auto-intersecciones.
 2. Todo polígono en \mathbb{R}^2 tiene un movimiento expansivo.
- ¿Cuándo no tiene movimientos expansivos un grafo?
 - ★ Vértice no puntiagudo.



REGLA DEL CARPINTERO

[Streinu'00] [Connelly-Demaine-Rote'00] Sí, se puede.

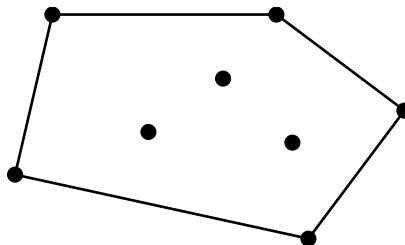
- Ideas clave:
 1. Los movimientos *expansivos* no generan auto-intersecciones.
 2. Todo polígono en \mathbb{R}^2 tiene un movimiento expansivo.
- ¿Cuándo no tiene movimientos expansivos un grafo?
 - ★ Vértice no puntiagudo.
 - ★ Cruce de aristas.



REGLA DEL CARPINTERO

[Streinu'00] [Connelly-Demaine-Rote'00] Sí, se puede.

- Ideas clave:
 1. Los movimientos *expansivos* no generan auto-intersecciones.
 2. Todo polígono en \mathbb{R}^2 tiene un movimiento expansivo.
- ¿Cuándo no tiene movimientos expansivos un grafo?
 - ★ Vértice no puntiagudo.
 - ★ Cruce de aristas.
 - ★ Usar todas las aristas del borde.

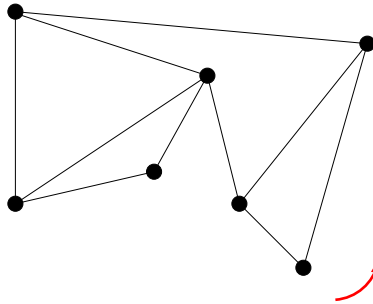


REGLA DEL CARPINTERO

- "Grafos maximales puntiagudos sin cruces \Leftrightarrow p.p.t.'s" implica:

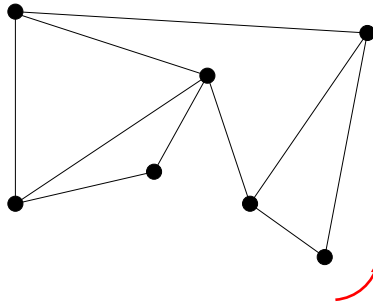
REGLA DEL CARPINTERO

- "Grafos maximales puntiagudos sin cruces \Leftrightarrow p.p.t.'s" implica:
 - ★ [Streinu'00] Toda p.p.t., quitada una arista del borde, tiene un movimiento expansivo con un grado de libertad.



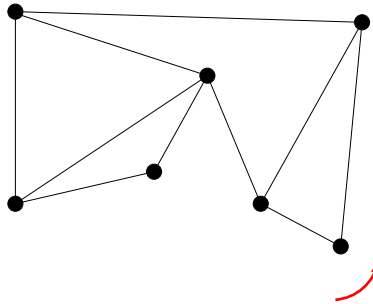
REGLA DEL CARPINTERO

- "Grafos maximales puntiagudos sin cruces \Leftrightarrow p.p.t.'s" implica:
 - ★ [Streinu'00] Toda p.p.t., quitada una arista del borde, tiene un movimiento expansivo con un grado de libertad.



REGLA DEL CARPINTERO

- "Grafos maximales puntiagudos sin cruces \Leftrightarrow p.p.t.'s" implica:
 - ★ [Streinu'00] Toda p.p.t., quitada una arista del borde, tiene un movimiento expansivo con un grado de libertad.



REGLA DEL CARPINTERO

- Algoritmo: Dado un polígono simple (no convexo):

REGLA DEL CARPINTERO

- Algoritmo: Dado un polígono simple (no convexo):
 1. Completarlo a una pseudo-triangulación puntiaguda.

REGLA DEL CARPINTERO

- Algoritmo: Dado un polígono simple (no convexo):
 1. Completarlo a una pseudo-triangulación puntiaguda.
 2. Elegir una arista del borde que no esté entre las del polígono original.

REGLA DEL CARPINTERO

- Algoritmo: Dado un polígono simple (no convexo):
 1. Completarlo a una pseudo-triangulación puntiaguda.
 2. Elegir una arista del borde que no esté entre las del polígono original.
 3. Mover el mecanismo resultante a lo largo de su trayectoria expansiva.

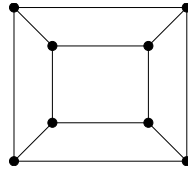
REGLA DEL CARPINTERO

- Algoritmo: Dado un polígono simple (no convexo):
 1. Completarlo a una pseudo-triangulación puntiaguda.
 2. Elegir una arista del borde que no esté entre las del polígono original.
 3. Mover el mecanismo resultante a lo largo de su trayectoria expansiva.
 4. Parar cuando el grafo no sea puntiagudo; en algún vértice se alinean dos aristas.

REGLA DEL CARPINTERO

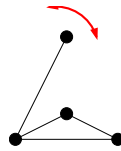
- Algoritmo: Dado un polígono simple (no convexo):
 1. Completarlo a una pseudo-triangulación puntiaguda.
 2. Elegir una arista del borde que no esté entre las del polígono original.
 3. Mover el mecanismo resultante a lo largo de su trayectoria expansiva.
 4. Parar cuando el grafo no sea puntiagudo; en algún vértice se alinean dos aristas.
 5. Hacer un flip local para volver a una pseudo-triangulación puntiaguda. Ir al paso **2**.

GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

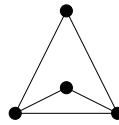


GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

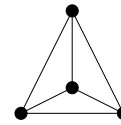
- Grafo geométrico **(infinitesimalmente) rígido**: traslaciones y rotaciones son los únicos movimientos que preservan distancias de aristas.



No rígido



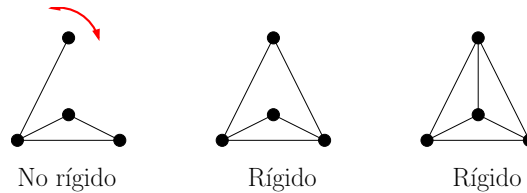
Rígido



Rígido

GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

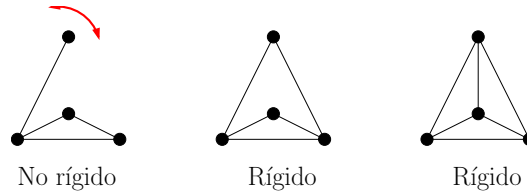
- Grafo geométrico (**infinitesimalmente**) **rígido**: traslaciones y rotaciones son los únicos movimientos que preservan distancias de aristas.



[Streinu'00] Las pseudo-triangulaciones puntiagudas son *minimalmente rígidas*.

GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

- Grafo geométrico (**infinitesimalmente**) **rígido**: traslaciones y rotaciones son los únicos movimientos que preservan distancias de aristas.

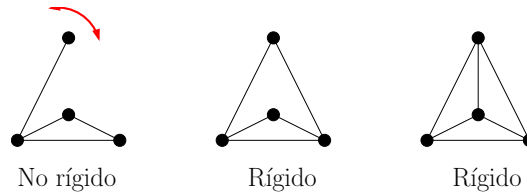


[Streinu'00] Las pseudo-triangulaciones puntiagudas son *minimalmente rígidas*.

[Orden-Santos'02] Toda pseudo-triangulación es rígida.

GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

- Grafo geométrico (**infinitesimalmente**) **rígido**: traslaciones y rotaciones son los únicos movimientos que preservan distancias de aristas.



[Streinu'00] Las pseudo-triangulaciones puntiagudas son *minimalmente rígidas*.

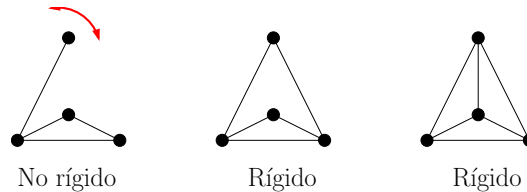
[Orden-Santos'02] Toda pseudo-triangulación es rígida.

- Intuitivamente, el número de aristas de una pseudo-triangulación determina su "grado de rigidez":

$$2n - 3 + n_\gamma \text{ para } n_\gamma = 0, \dots, n_i$$

GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

- Grafo geométrico (**infinitesimalmente**) **rígido**: traslaciones y rotaciones son los únicos movimientos que preservan distancias de aristas.



[Streinu'00] Las pseudo-triangulaciones puntiagudas son *minimalmente rígidas*.

[Orden-Santos'02] Toda pseudo-triangulación es rígida.

- Intuitivamente, el número de aristas de una pseudo-triangulación determina su "grado de rigidez":

$$2n - 3 + n_\gamma \text{ para } n_\gamma = 0, \dots, n_i$$

¿Se puede trasladar esta noción a grafos abstractos?

GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

- Una inmersión plana de un grafo en \mathbb{R}^2 es una **pseudo-triangulación combinatoria** si:

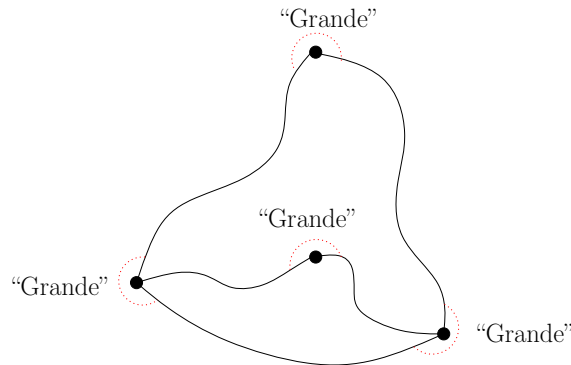
Existe un etiquetado de sus ángulos como *grandes* o *pequeños* cumpliendo:

GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

- Una inmersión plana de un grafo en \mathbb{R}^2 es una **pseudo-triangulación combinatoria** si:

Existe un etiquetado de sus ángulos como *grandes* o *pequeños* cumpliendo:

- (i) Cada cara acotada tiene *tres vértices pequeños*.

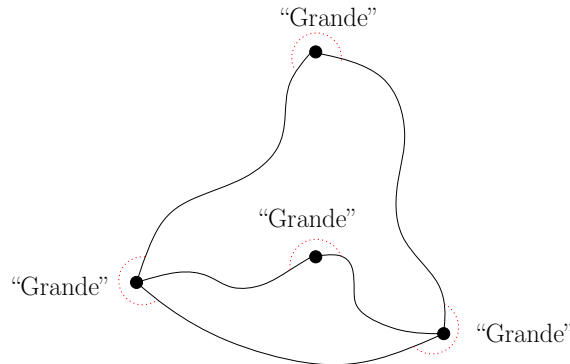


GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

- Una inmersión plana de un grafo en \mathbb{R}^2 es una **pseudo-triangulación combinatoria** si:

Existe un etiquetado de sus ángulos como *grandes* o *pequeños* cumpliendo:

- (i) Cada cara acotada tiene *tres vértices pequeños*.
- (ii) La cara no acotada tiene todos los vértices *grandes*.

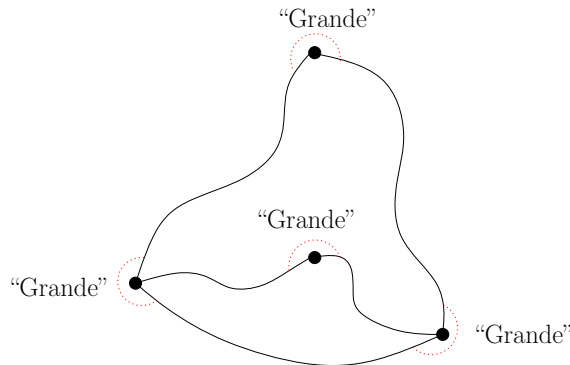


GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

- Una inmersión plana de un grafo en \mathbb{R}^2 es una **pseudo-triangulación combinatoria** si:

Existe un etiquetado de sus ángulos como *grandes* o *pequeños* cumpliendo:

- (i) Cada cara acotada tiene *tres vértices pequeños*.
- (ii) La cara no acotada tiene todos los vértices *grandes*.
- (iii) Ningún vértice es incidente a más de un ángulo *grande*.

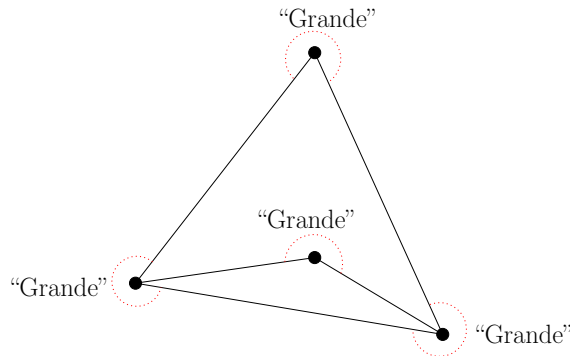


GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

- Una inmersión plana de un grafo en \mathbb{R}^2 es una **pseudo-triangulación combinatoria** si:

Existe un etiquetado de sus ángulos como *grandes* o *pequeños* cumpliendo:

- (i) Cada cara acotada tiene *tres vértices pequeños*.
- (ii) La cara no acotada tiene todos los vértices *grandes*.
- (iii) Ningún vértice es incidente a más de un ángulo *grande*.



GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

- Vértices **puntiagudos**: incidentes a un ángulo grande.

GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

- Vértices **puntiagudos**: incidentes a un ángulo grande.
- Propiedad de *Laman generalizada* para pseudo-triangulaciones combinatorias:

GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

- Vértices **puntiagudos**: incidentes a un ángulo grande.
- Propiedad de *Laman generalizada* para pseudo-triangulaciones combinatorias:

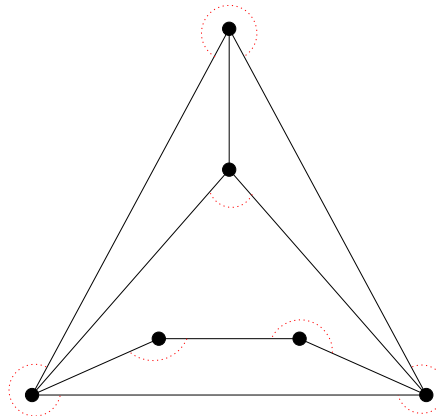
Todo subgrafo con k vértices puntiagudos y l no puntiagudos tiene

$$\text{n}^\circ \text{ aristas} \leq 2k + 3l - 3$$

GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

- Vértices **puntiagudos**: incidentes a un ángulo grande.
- Propiedad de *Laman generalizada* para pseudo-triangulaciones combinatorias:
Todo subgrafo con k vértices puntiagudos y l no puntiagudos tiene

$$\text{n}^{\circ} \text{ aristas} \leq 2k + 3l - 3$$



$$k = 6$$

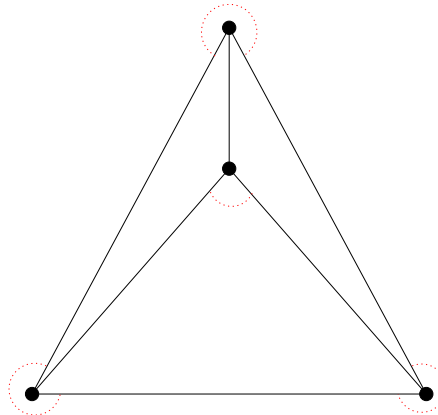
$$l = 0$$

$$9 \leq 2k + 3l - 3 \text{ aristas}$$

GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

- Vértices **puntiagudos**: incidentes a un ángulo grande.
- Propiedad de *Laman generalizada* para pseudo-triangulaciones combinatorias:
Todo subgrafo con k vértices puntiagudos y l no puntiagudos tiene

$$\text{n}^\circ \text{ aristas} \leq 2k + 3l - 3$$



$$k = 4$$

$$l = 0$$

$$6 \not\leq 2k + 3l - 3 \text{ aristas}$$

GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

[Orden-Santos-Servatius²'03] Dado un grafo abstracto G plano, son equivalentes:

GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

[Orden-Santos-Servatius²'03] Dado un grafo abstracto G plano, son equivalentes:

(i) G es rígido.

GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

[Orden-Santos-Servatius²'03] Dado un grafo abstracto G plano, son equivalentes:

- (i) G es rígido.
- (ii) G se puede etiquetar como p.t.c. con Laman generalizada.

GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

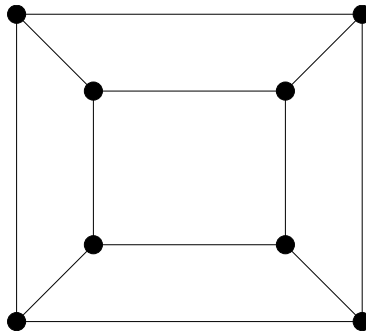
[Orden-Santos-Servatius²'03] Dado un grafo abstracto G plano, son equivalentes:

- (i) G es rígido.
- (ii) G se puede etiquetar como p.t.c. con Laman generalizada.
- (iii) G tiene una inmersión como pseudo-triangulación en \mathbb{R}^2 .

GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

[Orden-Santos-Servatius²'03] Dado un grafo abstracto G plano, son equivalentes:

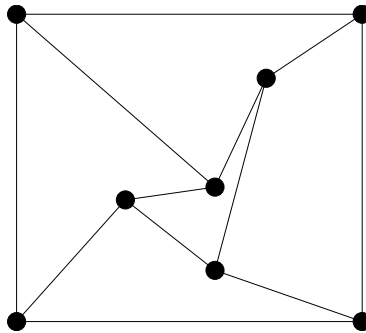
- (i) G es rígido.
- (ii) G se puede etiquetar como p.t.c. con Laman generalizada.
- (iii) G tiene una inmersión como pseudo-triangulación en \mathbb{R}^2 .



GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

[Orden-Santos-Servatius²'03] Dado un grafo abstracto G plano, son equivalentes:

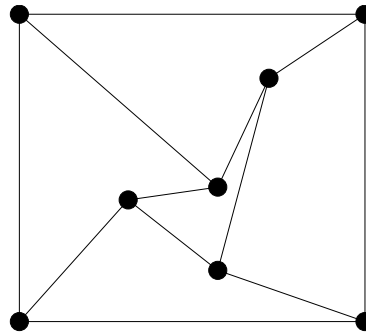
- (i) G es rígido.
- (ii) G se puede etiquetar como p.t.c. con Laman generalizada.
- (iii) G tiene una inmersión como pseudo-triangulación en \mathbb{R}^2 .



GRAFOS PLANOS Y RIGIDEZ

[Orden-Santos-Servatius²'03] Dado un grafo abstracto G plano, son equivalentes:

- (i) G es rígido.
- (ii) G se puede etiquetar como p.t.c. con Laman generalizada.
- (iii) G tiene una inmersión como pseudo-triangulación en \mathbb{R}^2 .



$12 < 2n - 3$ aristas \Rightarrow No p.t.

OTRAS APLICACIONES Y PROPIEDADES

OTRAS APLICACIONES Y PROPIEDADES

- Detección de colisiones

[Agarwal-Basch-Guibas-Hershberger-Zhang'00].

OTRAS APLICACIONES Y PROPIEDADES

- Detección de colisiones

[Agarwal-Basch-Guibas-Hershberger-Zhang'00].

- Visibilidad

[Speckmann-Tóth'03].

OTRAS APLICACIONES Y PROPIEDADES

- Detección de colisiones

[Agarwal-Basch-Guibas-Hershberger-Zhang'00].

- Visibilidad

[Speckmann-Tóth'03].

- Levantamiento a superficies

[Aichholzer-Aurenhammer-Brass-Krasser'02].

OTRAS APLICACIONES Y PROPIEDADES

- Detección de colisiones

[Agarwal-Basch-Guibas-Hershberger-Zhang'00].

- Visibilidad

[Speckmann-Tóth'03].

- Levantamiento a superficies

[Aichholzer-Aurenhammer-Brass-Krasser'02].

- Recíprocos sin cruces de grafos en tensión

[Orden-Rote-Santos-Servatius²-Whiteley'03].

BIBLIOGRAFÍA

- P. Agarwal, J. Basch, L. Guibas, J. Hershberger, and L. Zhang,
[Deformable free space tilings for kinetic collision detection.](#)
In B. R. Donald, K. Lynch and D. Rus, editors, *Algorithmic and Computational Robotics: New Directions, 4th Int. Workshop on Alg. Found. Robotics (WAFR)*, pages 83–96. A K Peters, 2000.
- O. Aichholzer, F. Aurenhammer, P. Brass and H. Krasser,
[Pseudo-triangulations from surfaces and a novel type of flip.](#)
SIAM J. Comput., **32** (2003), 1621–1653.
- R. Connelly, E. D. Demaine, and G. Rote,
[Blowing Up Polygonal Linkages.](#)
Discrete Comput. Geom., **30**:2, (2003), 205–239.
- P. Flajolet and M. Noy,
[Analytic combinatorics of non-crossing configurations.](#)
Discrete Math. **204** (1999) 203–229.

- D. Orden, G. Rote, F. Santos, B. Servatius, H. Servatius and W. Whiteley,
[Non-crossing frameworks with non-crossing reciprocals.](#)
To appear in *Discrete Comput. Geom.*, Special volume in honor of Louis Billera,
(M. Bayer, C. Lee and B. Sturmfels, eds.), 2004.
- D. Orden and F. Santos,
[The polytope of non-crossing graphs on a planar point set.](#)
To appear in *Discrete and Computational Geometry*.
Available at <http://arxiv.org/abs/math.CO/0302126>
- D. Orden, F. Santos, B. Servatius and H. Servatius,
[Combinatorial pseudo-triangulations.](#)
Preprint July 2003, 11 pages. Available at
<http://arxiv.org/abs/math.CO/0307370>
- B. Speckmann and C. D. Tóth,
[Allocating vertex \$\pi\$ -guards in simple polygons via pseudo-triangulations.](#)
In *Proc. 14th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, 2003, pp.
109–118.

- I. Streinu,
[A combinatorial approach to planar non-colliding robot arm motion planning.](#)
In *Proc. 41st Ann. Symp. on Found. of Computer Science (FOCS 2000)*, Redondo Beach, California, pages 443–453, 2000.