

Curso cero:
Sistemas lineales

David Orden
Dep. Matemáticas
UAH

Sistemas

Definiciones

Resolución

Gauss

Gauss-Jordan

Inversa

Cramer

Ejercicios

Rouché-Fröbenius

Rouché-Fröbenius

Ejercicios

Autoevaluación

Resolución

Rouché-Fröbenius

Bibliografía y webs
recomendadas

Curso cero “Matemáticas en informática”: Sistemas de ecuaciones lineales

David Orden
Dep. Matemáticas
UAH

Septiembre 2007

Sistemas

Definiciones

Resolución

Gauss

Gauss-Jordan

Inversa

Cramer

Ejercicios

Rouché-Fröbenius

Rouché-Fröbenius

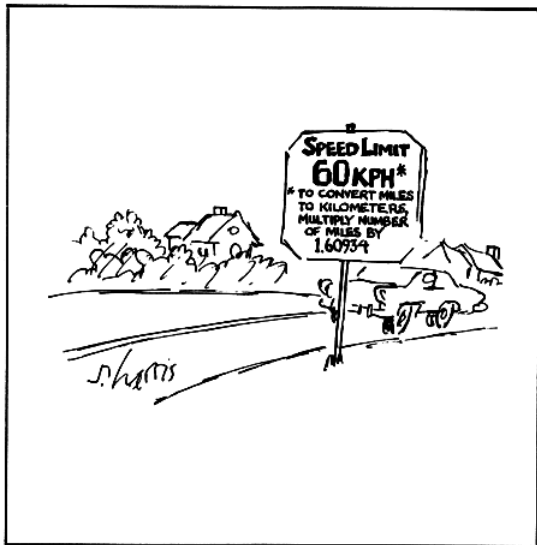
Ejercicios

Autoevaluación

Resolución

Rouché-Fröbenius

Bibliografía y webs recomendadas



- Se llama **ecuación lineal** con n incógnitas a

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ son los **coeficientes** y $b \in \mathbb{R}$ el **término independiente**.

- Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

- Equivalentemente, el sistema se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

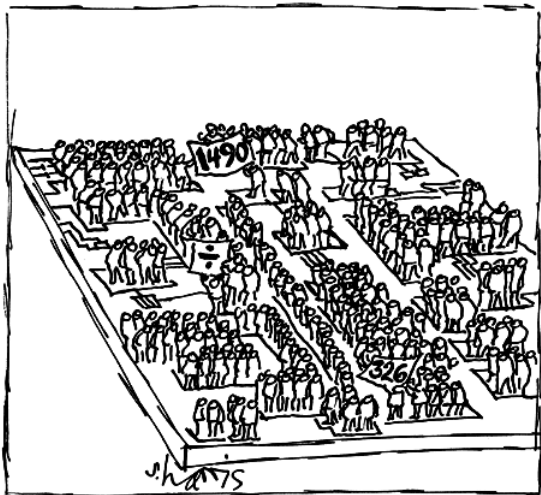
y vamos a trabajar con él en esta forma $Ax = b$.

- Un sistema es **homogéneo** cuando todos los b_i son 0.
- Se llama **sistema incompatible** al que no tiene solución. En caso contrario, se dice **compatible**:
 - ▶ Si la solución es única, **compatible determinado**.
 - ▶ Si no, tiene infinitas soluciones, y se llama **compatible indeterminado**.
- Todo sistema homogéneo es compatible, pues siempre admite la solución $x_i = 0, \forall i$.
- Dos sistemas son **equivalentes** si admiten las mismas soluciones. Las operaciones elementales en la **matriz ampliada** ($A|b$) del sistema dan lugar a sistemas equivalentes.
- **Ejemplo:**

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \end{array} \right)$$
$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - 2y = 10 \\ 4x + 3y = 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 5 \\ 5y = -5 \end{array} \right\}$$

Sistemas

HUMAN SILICON CHIP:
CAPABLE OF 6 COMPUTATIONS PER HOUR



- **Método de Gauss:** (m y n cualesquiera)

Operaciones elementales en la matriz ampliada para obtener un sistema equivalente triangular superior.

En el paso k usaremos a_{kk} como “pivote” para hacer cero los elementos de su columna que están por debajo de él.

	Elemento que	
	queremos	
Fila del	hacer cero	Fila del
elemento que	$\frac{\quad}{\text{Pivote}}$	pivote
queremos		
hacer cero		

- **EJEMPLO:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 6 \\ 4 & 5 & -5 & | & 3 \\ -2 & 6 & -2 & | & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1 \\ \sim \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 6 \\ 0 & 3 & -3 & | & -9 \\ 0 & 7 & -3 & | & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_3 - \frac{7}{3}F_2 \\ \sim \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 6 \\ 0 & 3 & -3 & | & -9 \\ 0 & 0 & 4 & | & 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 6 \\ 4x + 5y - 5z = 3 \\ -2x + 6y - 2z = -7 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x + y - z = 6 \\ 3y - 3z = -9 \\ 4z = 20 \end{cases}$$

- Si el sistema es **incompatible**, obtendremos una matriz

de la forma $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 6 \\ 0 & 3 & -3 & | & -9 \\ 0 & 0 & 0 & | & 20 \end{pmatrix}$

- Si el sistema es **compatible indeterminado**, obtendremos una matriz de la forma (parámetro z)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 6 \\ 0 & 3 & -3 & | & -9 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 6 + z \\ 3y = -9 + 3z \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = -3 + z \end{cases}$$

- **Método de Gauss-Jordan:** (m y n cualesquiera)
Operaciones elementales en la **matriz ampliada** para obtener un sistema equivalente **diagonal**.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 6 \\ 4 & 5 & -5 & | & 3 \\ -2 & 6 & -2 & | & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1 \\ \sim \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 6 \\ 0 & 3 & -3 & | & -9 \\ 0 & 7 & -3 & | & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_3 - \frac{7}{3}F_2 \\ \sim \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 6 \\ 0 & 3 & -3 & | & -9 \\ 0 & 0 & 4 & | & 20 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_2 + \frac{3}{4}F_3 \\ F_1 + \frac{1}{4}F_3 \\ \sim \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 11 \\ 0 & 3 & 0 & | & 6 \\ 0 & 0 & 4 & | & 20 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_1 - \frac{1}{3}F_2 \\ \sim \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 9 \\ 0 & 3 & 0 & | & 6 \\ 0 & 0 & 4 & | & 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 6 \\ 4x + 5y - 5z = 3 \\ -2x + 6y - 2z = -7 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x + y - z = 6 \\ 3y - 3z = -9 \\ 4z = 20 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x = 9 \\ 3y = 6 \\ 4z = 20 \end{cases}$$

- No siempre es posible. Por ejemplo para

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 6 \\ 0 & 3 & -3 & | & -9 \\ 0 & 0 & 0 & | & 20 \end{pmatrix}$$

- **Método de la inversa:** ($m = n$)

Para resolver $Ax = b$, calcular A^{-1} y obtener $x = A^{-1}b$.

Para resolver
$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 1 \\ y - 2z = 2 \\ -2x + 4y - 7z = 3 \end{cases}$$

se hace
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- Recordar que una de las formas de calcular la inversa usaba Gauss-Jordan.
- **Observación:** Sólo funciona si A tiene inversa (es decir, si $\det A \neq 0$).

- **Método de Cramer:** ($m = n$)

Utilizando determinantes, $x_i = \frac{B_i}{\det A}$ para

$$B_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \overset{i}{\downarrow} b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Para resolver $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$ se hace

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{3} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{3} = -2$$

Ejercicios:

Resolver, por todos los métodos posibles, el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - z + t = 2 \\ 2x + 3y - 4z + 5t = 5 \\ 3y + z + 2t = 10 \\ x - 4y - 3z + 4t = 9 \end{array} \right.$$

1

Resolver, por todos los métodos posibles, el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - z + t = 4 \\ 2x - 3y - 4z + 5t = 0 \\ 15y + 5z + 10t = 25 \\ x - 4y - 3z + 4t = -4 \end{array} \right.$$

2

Resolver, por todos los métodos posibles, el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y + 4z + 2t = 5 \\ -x + 2y - 2z + 4t = 3 \\ -3x + 4y + 2z + 3t = -1 \\ -5x + 5y + 8z + 8t = 0 \end{array} \right.$$

3

Sistemas

Definiciones

Resolución

Gauss

Gauss-Jordan

Inversa

Cramer

Ejercicios

Rouché-Fröbenius

Rouché-Fröbenius

Ejercicios

Autoevaluación

Resolución

Rouché-Fröbenius

Bibliografía y webs
recomendadas

Rouché-Fröbenius



"...and, as you go out into the world, I predict that you will, gradually and imperceptibly, forget all you ever learned at this university."

- En la sección anterior vimos que el método de Gauss permite decidir si un sistema es compatible o no.

- El **Teorema de Rouché-Fröbenius** afirma:

$$Ax = b \text{ compatible} \iff \text{rango}(A) = \text{rango}(A|b)$$

- De hecho, para n incógnitas:

$\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A|b)$
Sistema incompatible
(S.I.)

$\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = r$
Sistema compatible

$$r = n$$

Determinado
(S.C.D.)

$$r < n$$

Indeterminado
(S.C.I.)

con $n - r$
parámetros

$$\text{Discutir el sistema } \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2y + 5z = 0 \\ -x + 10y - 9z = 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix} = 2 \\ \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 1 & -2 & 5 & | & 0 \\ -1 & 10 & -9 & | & 1 \end{pmatrix} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{S.I.}$$

$$\text{Discutir, en función de } \lambda, \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2y + 5z = 0 \\ -x + 10y - 9z = \lambda \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix} = 2 \\ \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 1 & -2 & 5 & | & 0 \\ -1 & 10 & -9 & | & \lambda \end{pmatrix} = \begin{cases} 3 \text{ si } \lambda \neq 2 \\ 2 \text{ si } \lambda = 2 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

\Rightarrow S.I. si $\lambda \neq 2$, S.C.I. si $\lambda = 2$

Ejercicios:

Aplicar Rouché-Fröbenius para discutir los siguientes sistemas. En caso de ser compatibles, resolverlos.

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ 2x - y + z = -5 \\ 3x + 2y + 5z = 3 \\ 3x - 2z = 7 \end{array} \right.$$

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 5 \\ 2x + y - z = 5 \\ 3x + 2y + z = 11 \\ x + y + 2z = 10 \end{array} \right.$$

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + z + 2t = -5 \\ x + y + z + t = 4 \\ 3x + y + z - t = 6 \\ 6x + y + 3z + 2t = 5 \end{array} \right.$$

Ejercicios:

Discutir los siguientes sistemas en función del valor del parámetro a :

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} 2x - ay + z = 1 \\ 4x + (3 - a)y + 2z = 4 + a \\ ax + ay + (a + 1)z = -1 \end{array} \right.$$

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \\ x + y + z = a \end{array} \right.$$

Sistemas

Definiciones

Resolución

Gauss

Gauss-Jordan

Inversa

Cramer

Ejercicios

Rouché-Fröbenius

Rouché-Fröbenius

Ejercicios

Autoevaluación

Resolución

Rouché-Fröbenius

Bibliografía y webs recomendadas

Autoevaluación

Antes de seguir, intenta resolver los ejercicios propuestos.
Una vez que los hayas intentado, podrás comprobar tus
resultados con las soluciones que aparecen a continuación.

Sistemas

Definiciones

Resolución

Gauss

Gauss-Jordan

Inversa

Cramer

Ejercicios

Rouché-Fröbenius

Rouché-Fröbenius

Ejercicios

Autoevaluación

Resolución

Rouché-Fröbenius

Bibliografía y webs
recomendadas

Soluciones resolución:

1 Por cualquiera de los métodos,
 $\{x = 4, y = -1, z = 5, t = 4\}$

2 Sistema compatible indeterminado. Por Gauss,
 $\{x = 1 + 25t, y = 2 - 7t, z = -1 + 19t, t = t\}$

3 Sistema incompatible.

Soluciones Rouché-Fröbenius:

- (a) Sistema compatible determinado, con solución $\{x = 1, y = 5, z = -2\}$
- (b) Sistema incompatible.
- (c) Sistema compatible indeterminado con un grado de libertad. $\{x = 1 + t, y = 5 + t, z = -2 - 3t, t = t\}$

1

Soluciones Rouché-Fröbenius:

(a) $\det A = a^2 + 5a + 6$

- Para $a \neq 2, a \neq 3$, sistema compatible determinado (porque $\det A \neq 0 \Rightarrow$ rango máximo).
- Para $a = 2$, sistema compatible indeterminado con un grado de libertad.
- Para $a = 3$, sistema incompatible.

(b) $\det(A|b) = (a + 3)(a - 1)^3$

- Para $a \neq -3, a \neq 1$, sistema incompatible.
- Para $a = -3$, sistema compatible determinado.
- Para $a = 1$, sistema compatible indeterminado con dos grados de libertad (equivale a $x + y + z = 1$, tiene solución $x = 1 - y - z, y = y, z = z$).

Sistemas

Definiciones

Resolución

Gauss

Gauss-Jordan

Inversa

Cramer

Ejercicios

Rouché-Fröbenius

Rouché-Fröbenius

Ejercicios

Autoevaluación

Resolución

Rouché-Fröbenius

Bibliografía y webs recomendadas

Bibliografía y webs recomendadas

- *Matemáticas Bachillerato 2, Tecnología*, Esther Bescós y Zoila Pena, Ed. Oxford, 1998.
- Página sobre el estudio de sistemas de ecuaciones lineales.
- Dos páginas sobre discusión de sistemas por Rouché-Fröbenius son ésta y ésta otra.