Departamento de Matemáticas, Universidad de Alcalá

Matemática Discreta (ITST, ITSE, ITT) **Refuerzo curso 2007-2008**

Práctica 4.2
(Aplicaciones lineales)

1. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Demostrar que si S es un subespacio vectorial de V, entonces $f(S)$ es subespacio vectorial de V'.

2. Estudiar si las siguientes aplicaciones son lineales:

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.

   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x - 2y$.

   (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x + y, xy)$.

   (d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (3x + y, x - y, y - 1)$.

   (e) $\det : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ para $n > 1$.

3. Para la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x+y, x-z)$:

   (a) Determinar la matriz de f respecto de las bases $B = \{(3, 0, 1), (1, 2, 0), (2, 3, 1)\}$ y $B' = \{(1, 0), (1, 1)\}$.

   (b) Respecto de B y B', calcular $\mathrm{Ker}(f)$ obteniendo una base.

   (c) Dar también la expresión de $\mathrm{Ker}(f)$ en ecuaciones implícitas (sistema homogéneo que lo genera).

   (d) Respecto de B y B', calcular $\mathrm{Im}(f)$ obteniendo una base.

4. Para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineal dada por $f(x, y) = (2x - y, x + y, 2x + 2y)$:

   (a) Determinar la matriz de f respecto de las bases $B = \{(2, 1), (-1, 2)\}$ y $B' = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

   (b) Respecto de B y B', calcular $\mathrm{Ker}(f)$ obteniendo una base.

   (c) Respecto de B y B', calcular $\mathrm{Im}(f)$ obteniendo una base.

   (d) Dar también la expresión de $\mathrm{Im}(f)$ en ecuaciones implícitas (sistema homogéneo que lo genera).

5. Para $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a + d, b - c)$$

   (a) Demostrar que f es una aplicación lineal.

(b) Determinar la matriz de f respecto de las bases canónicas $B = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ y $B' = \{(1,0),(0,1)\}$.

(c) Respecto de B y B', calcular $\mathrm{Ker}(f)$ obteniendo una base.

(d) Respecto de B y B', calcular $\mathrm{Im}(f)$ obteniendo una base.

6. Sea $f : V_3 \to V_4'$ una aplicación lineal entre los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales V_3 y V_4', de dimensiones 3 y 4 respectivamente, dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & a & 1 \\ -a & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinar los valores de a para los que f es inyectiva. Para el resto, calcular $\mathrm{Ker}(f)$ obteniendo una base.

(b) Determinar los valores de a para los que f es sobreyectiva. Para el resto, calcular $\mathrm{Im}(f)$ obteniendo una base.

7. Para la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y,z) = (x + 2ay - z, -x + ay - 3z, ax - 2y + 2z)$:

(a) Determinar los valores de a para los que f es inyectiva. Para el resto, calcular $\mathrm{Ker}(f)$ obteniendo una base.

(b) Determinar los valores de a para los que f es sobreyectiva. Para el resto, calcular $\mathrm{Im}(f)$ obteniendo una base.

8. Para el automorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $f(x,y) = (x+2y, 2x-y)$:

(a) Determinar la matriz de f respecto de la base $B = \{(-1,2),(3,-3)\}$.

(b) Determinar la matriz del automorfismo inverso f^{-1} (respecto de esa misma base).

9. Determinar la matriz en la base $B_2 = \{(2,3),(-1,2)\}$ del endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base $B_1 = \{(-1,-2),(3,1)\}$ es $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. (Pista: Usar el ejercicio 12.a) de la Práctica 4.1)