PASO DE PARAMÉTRICAS A IMPLÍCITAS:

"Dado $\underline{S = \mathcal{L}(\{v_1, \dots, v_5\}) \in \mathbb{R}^n}$, encontrar el sistema homogéneo que genera al espacio vectorial S"

$\hookrightarrow$ Por definición,

$$S = \mathcal{L}(\{v_1, \dots, v_5\}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} \uparrow \\ v_1 \\ \downarrow \end{pmatrix} + \dots + \alpha_5 \cdot \begin{pmatrix} \uparrow \\ v_5 \\ \downarrow \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_1, \dots, \alpha_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

Es decir,

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in S \iff \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_5 \in \mathbb{R} \text{ tales que } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} \uparrow \\ v_1 \\ \downarrow \end{pmatrix} + \dots + \alpha_5 \cdot \begin{pmatrix} \uparrow \\ v_5 \\ \downarrow \end{pmatrix}}$$

$$\iff \text{El sistema } \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \dots & v_5 \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ tiene solución}$$

$$\boxed{\iff \text{rango} \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \dots & v_5 \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & x_1 \\ v_1 & \dots & v_5 & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow & x_n \end{pmatrix}}$$

Y esto nos dará las ecuaciones en $\underline{x_1, \dots, x_n}$ que determinan qué $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ están en $\underline{S}$

EJEMPLO:

$$\underline{S = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\right)}; \quad \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S} \iff \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 3 & 2 & y \\ 2 & 1 & z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 3 & 2 & y \\ 2 & 1 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 5 & y-3x \\ 0 & 3 & z-2x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 5 & y-3x \\ 0 & 0 & z-2x-\frac{3}{5}y+\frac{9}{5}x \end{pmatrix}$$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\iff z - 2x - \frac{3}{5}y + \frac{9}{5}x = 0$$

$$\iff z - \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}y = 0$$

$$\boxed{\iff 5z - x - 3y = 0}$$

▹ Se puede <u>comprobar</u> que $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ cumplen esta ecuación.

david.orden@uah.es // www2.uah.es/ordend