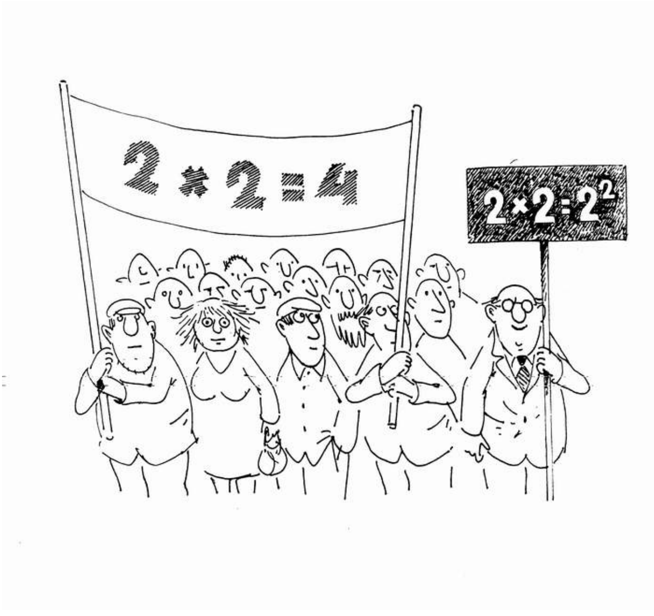
Curso cero "Matemáticas en informática": Matrices y determinantes

David Orden
Dep. Matemáticas
UAH

Septiembre 2007

Matrices



- Se llama matriz de orden $m \times n$ a cualquier conjunto de elementos dispuestos en m filas y n columnas:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}$$

- Dos matrices son iguales si lo son todos sus elementos.
- Una matriz es cuadrada si $m = n$. En ese caso, $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ forman la diagonal principal.
- Se llama matriz triangular superior/inferior la que tiene nulos todos los elementos por debajo/encima de la diagonal.

Buscar un ejemplo de cada tipo.

- Una matriz diagonal tiene nulos todos los elementos fuera de la diagonal.
- Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, su opuesta $-A$ tiene elementos $(-a_{ij})$.
- Para una matriz A, su traspuesta $A^t = (a_{j,i}) =\in \mathcal{M}_{n\times m}$ se obtiene intercambiando en A las filas por las columnas.
- Si $A = A^t$, la matriz se dice simétrica. Si $A = -A^t$, se llama antisimétrica.

Buscar un ejemplo de cada tipo.

- La suma de matrices $A + B$ se hace elemento a elemento:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 5 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 7 & 14 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

- Cumple las siguientes **propiedades**:
  - Conmutativa; $A + B = B + A$.
  - Asociativa; $A + (B + C) = (A + B) + C$.
  - Elemento neutro; $\exists 0 = (0)$ tal que $A + 0 = 0 + A = A$.
  - Elemento opuesto; $\exists -A$ tal que $A + (-A) = (-A) + A = 0$.

- La resta de matrices $A - B$ es simplemente $A + (-B)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 5 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 4 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}$$

- El producto de una matriz por un número $k \cdot A$ se hace elemento a elemento:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 35 & 45 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$$

- Cumple las siguientes **propiedades**:
  - Distributiva respecto de la suma de matrices; $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$.
  - Distributiva respecto de la suma de números; $(k + h) \cdot A = k \cdot A + h \cdot A$.
  - Asociativa entre números y matrices; $(k \cdot h) \cdot A = k \cdot (h \cdot A)$.
  - Elemento unidad; $\exists 1$ tal que $1 \cdot A = A$.
- ¡OJO! No confundir con el producto de dos matrices, que no es elemento a elemento.

- Dadas dos matrices $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n \times p}$, su producto $C = A \cdot B$ es $C \in \mathcal{M}_{m \times p}$.
  Cada c_{ij} se obtiene sumando los productos, elemento a elemento, de la fila i de A y la columna j de B:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 25 \\ -21 & 80 \\ -12 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\text{Haciendo} \begin{pmatrix} 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \\ 7 \cdot (-3) + 9 \cdot 0 & 7 \cdot 5 + 9 \cdot 5 \\ 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 & 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

- Número columnas de A = Número filas de B.
- Cumple las siguientes **propiedades**:
  - Asociativa; $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
  - Distributiva; $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
  - Asociativa respecto de producto por un número; $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B$.
- ¡¡El producto de matrices no es conmutativo!!
  (Ver el ejemplo anterior, ni siquiera existe $B \cdot A$).

El método de Gauss consiste en hacer ceros por debajo de la diagonal mediante operaciones elementales:

GAUSS(A)
INPUT: Matriz A en $\mathcal{M}_{m\times n}$.
OUTPUT: Matriz $\overline{A}$ equivalente y triangular superior.

for k **from** 1 **to** $n-1$ **do** *// Pivote en fila k //*
  // Para cada fila por debajo de la del pivote //
  for i **from** $k+1$ **to** m **do**
    $// \ Fila_i - \dfrac{\text{Elemento bajo el pivote}}{\text{Pivote}} \cdot \text{Fila del pivote} \ //$
    for j **from** k **to** n **do**
      $A(i,j) \leftarrow A(i,j) - \frac{A(i,k)}{A(k,k)} \cdot A(k,j)$
    end do
  end do
return A

OBS.: para cada k habría que asegurarse de que pivote$\neq 0$:
  if $A(k,k) = 0$ **then**
    intercambiar fila A_k con A_ℓ tal que $\ell > k$ y $A(\ell,\ell) \neq 0$
  end do

El método de Gauss-Jordan consiste en concatenar el anterior con hacer ceros por encima de la diagonal:

JORDAN(A)
INPUT: Matriz A en $\mathcal{M}_{m\times n}$.
OUTPUT: Matriz $\overline{A}$ equivalente y triangular inferior.
for k **from** n **to** 2 **do** *// Pivote en fila k //*
  // Para cada fila por encima de la del pivote //
  for i **from** $k-1$ **to** 1 **do**

$$// \; Fila_i - \frac{\text{Elemento sobre el pivote}}{\text{Pivote}} \cdot \text{Fila del pivote} \; //$$

    for j **from** k **to** 1 **do**
      $A(i,j) \leftarrow A(i,j) - \frac{A(i,k)}{A(k,k)} \cdot A(k,j)$
    end do
  end do
return A

GAUSS-JORDAN(A)
INPUT: Matriz A en $\mathcal{M}_{m\times n}$.
OUTPUT: Matriz $\overline{A}$ equivalente y diagonal.
return JORDAN(GAUSS(A))

- Para matrices cuadradas $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, el producto tiene elemento neutro; $\exists I_n$ tal que $I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$.
- Sin embargo, el elemento inverso A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ no siempre existe.
- Cuando existe, es única y se llama inversa.
  A una matriz que tiene inversa se le llama regular.
- Cálculo de la inversa por Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Se construye $(A|I_n)$ y se hacen operaciones elementales por filas hasta llegar a $(I_n|A^{-1})$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2-3F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \overset{F_1+2F_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

(Tras Gauss-Jordan, quizá multiplicar fila por número)

- El rango de una matriz es el número de filas F_i linealmente independientes (e.d., que no se pueden poner como $F_i = \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_m F_m$).
- Coincide con el número de columnas C_i lin.ind.
- Una matriz tiene inversa $\Leftrightarrow$ tiene rango máximo.
- Cálculo del rango por Gauss-Jordan:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix} = 2$$

Se hacen operaciones elementales por filas hasta hacer ceros debajo de la diagonal. El número de filas no nulas será el rango.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix} \overset{F_3 + 3F_2}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicios:

1. Calcular $A \cdot B$ para las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Calcular $A \cdot B$ para las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Calcular la inversa de las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicios:

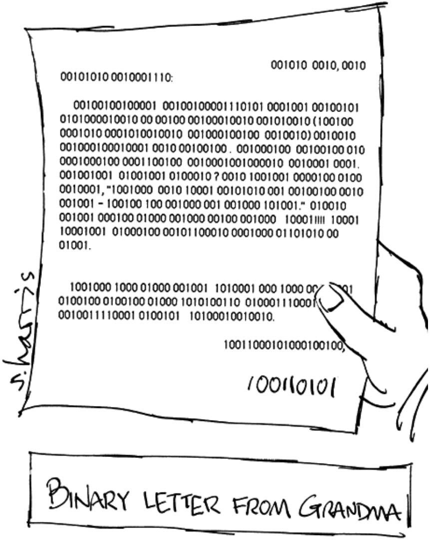
Calcular el rango de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 6 & 7 & -4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4 ¿Cuáles de ellas tendrán inversa?

Determinantes



- Se define el determinante de una matriz 2×2 como:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Para una matriz 3×3:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- Se llama adjunto de a_{ij} a

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \left| \begin{array}{c} \text{menor} \\ \text{complementario} \end{array} \right|$$

- Así, para $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ desarrollando por la primera fila se tiene

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

- Análogamente, se puede desarrollar por cualquier fila o columna; $\det A = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$.

- Para una matriz $n \times n$, el determinante se calcula desarrollando por una fila o columna:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

- Para hacer menos cálculos, conviene elegir la fila o columna que tenga más ceros.
- **Ejemplo:**

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 140$$

David Orden
Dep. Matemáticas
UAH

- $\det A = \det A^t$.
- Al intercambiar dos filas (o dos columnas) el determinante cambia de signo.
- Si se multiplica una fila (o columna) por un número, el determinante también se multiplica por ese número.
- Si una fila (o columna) es suma de otras, el determinante se descompone en suma de determinantes.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

- Si a una fila (o columna) se le suma otra multiplicada por un número, el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \overset{C_1 + kC_j}{=} \begin{vmatrix} a_{11} + k \cdot a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} + k \cdot a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + k \cdot a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

- Si una matriz tiene una fila (o columna) compuesta por ceros, su determinante es cero.
- Si una matriz tiene dos filas proporcionales, su determinante es cero.
- Si en una matriz una fila (o columna) es combinación lineal de otras, su determinante es cero.

$$F_i = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \cdots + \lambda_n F_n \Rightarrow \det A = 0$$

- El determinante de una matriz triangular es el producto de la diagonal $\rightarrow$ EL MÉTODO MÁS EFICIENTE ES TRIANGULAR LA MATRIZ USANDO EL MÉTODO DE GAUSS (ver transparencias de "Sistemas").

- Se define la adjunta de A a la matriz formada por los adjuntos (pincha para recordar); $\operatorname{adj}(A) = (A_{ij})$.
- La inversa también se puede calcular usando la adjunta:

$$A^{-1} = \frac{[\operatorname{adj}(A)]^t}{\det A}$$

- **Ejemplos:**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t}{2} = $$

$$= \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 & -1/2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- Se llama menor de orden k de A al determinante de una submatriz $k \times k$.
- El rango también se puede calcular usando menores:

  rango$(A) = r$ si r es el mayor orden para el que existe un menor no nulo.

- **Ejemplos:**

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\text{porque } \det A = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 3,$$

$$\text{porque } \det A = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Ejercicios:

1. Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$

2. Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

3. Si $A \in \mathcal{M}_{k\times k}$ con k par, ¿qué relación hay entre $\det A$ y $\det(-A)$. ¿Y si k es impar?

4. Calcular, usando determinantes, la inversa de las matrices
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicios:

Calcular, usando determinantes, el rango de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 6 & 7 & -4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5

Autoevaluación

Antes de seguir, intenta resolver los ejercicios propuestos. Una vez que los hayas intentado, podrás comprobar tus resultados con las soluciones que aparecen a continuación.

Soluciones matrices:

1. $\begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 \\ 11 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

2. Imposible, el número de columnas de A no coincide con el número de filas de B.

3. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
(a la izquierda queda $3 \cdot I_3$ en lugar de I_3, así que hay que dividir la matriz de la derecha por 3).

4. $\text{rango}(A) = 1, \text{rango}(B) = 3, \text{rango}(C) = 2, \text{rango}(D) = 4.$

Soluciones determinantes:

1. -142
2. 41
3. Como se multiplican por -1 todas las filas (o columnas), el determinante se multiplica por $(-1)^k$, así que para k par $\det A = \det(-A)$, y para k impar $\det A = -\det(-A)$.
4. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Bibliografía y webs recomendadas

- *Matemáticas Bachillerato 2, Tecnología*, Esther Bescós y Zoila Pena, Ed. Oxford, 1998.
- Diccionario de términos matemáticos.
- Página muy completa sobre matrices y determinantes.
- Más sobre matrices y determinantes.