Álgebra (Ingeniería Informática) **Curso 2007-2008**

Práctica 6-2: Subespacios vectoriales. Aplicaciones lineales.

EJERCICIOS BÁSICOS

1. Analizar cuáles de estos subconjuntos son subespacios vectoriales. Para los que lo sean, calcular una base y su dimensión.
   (a) $W = \{(r, r+2, 0) \mid r \in \mathbb{R}\}$ en $\mathbb{R}^3$.
   (b) $W = \{(3z, -z, z) \mid z \in \mathbb{Z}_{11}\}$ en ${\mathbb{Z}_{11}}^3$.
   (c) $W = \{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 0\}$ en $\mathbb{R}^3$.
   (d) $W = \{(x, y, z) \mid 2xy = 0\}$ en ${\mathbb{Z}_{11}}^3$.

2. Determinar unas ecuaciones implícitas (minimales) para cada uno de los siguientes subespacios vectoriales dados en forma paramétrica:
   (a) $S = \mathcal{L}(\{(2, 1, 2), (-1, 2, 1)\})$ en $\mathbb{R}^3$.
   (b) $S = \mathcal{L}(\{(2, 3, 4), (3, 2, 3)\})$ en ${\mathbb{Z}_5}^3$.

3. Determinar unas ecuaciones paramétricas (minimales) para cada uno de los siguientes subespacios vectoriales dados en forma implícita:
   (a) $S = \{(x, y, z) \in {\mathbb{Z}_5}^3 \,|\, 2x - 3y + 4z = 0, 3x - 2y + z = 0, x - 3y - 2z = 0\}$.
   (b) $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 3x + 2y - z + 3t = 0, 2x - y + z - 2t = 0, x + 3y + 2z - t = 0\}$.

4. En el espacio vectorial $V = {\mathbb{Z}_5}^4$ se consideran los subespacios vectoriales

$$S_1 = \mathcal{L}(\{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 2, 3), (2, 1, 0, 3)\}) \qquad S_2 = \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{array} \right\}$$

   (a) Dar unas ecuaciones implícitas (minimales) de S_1.
   (b) Dar la dimensión y una base de $S_1 \cap S_2$ y de $S_1 + S_2$. ¿Es suma directa?

5. Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x + y - z, x + 2y - 3z)$.
   (a) Comprobar que es lineal y escribir su expresión matricial.
   (b) Determinar una base del núcleo de f y de la imagen de f.
   (c) Dar ecuaciones implícitas (minimales) del núcleo y la imagen de f.

6. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5\times4}(\mathbb{Z}_7),$$

   se considera la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_7}^4 \to {\mathbb{Z}_7}^5$ dada por $f(X) = A \cdot X$.
   (a) Determinar la imagen del subespacio $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{Z}_7^4 \mid x + 3y + 2z + 5t = 0\} \subset \mathbb{Z}_7^4$.
   (b) Dado el subespacio $T = \mathcal{L}(\{(2, 3, 4, 1, 5), (0, 4, 4, 0, 3)\}) \subset {\mathbb{Z}_7}^5$, determinar $f^{-1}(T)$.
   (c) Dar ecuaciones implícitas (minimales) del núcleo y la imagen de f.

EJERCICIOS DE REFUERZO

1. Determinar las coordenadas de los siguientes vectores en las bases dadas:

   (a) $(2,-2,3,-3)$ y $(1,-2,3,-4)$ en la base $B = \{(0,1,2,1),(1,3,2,1),(3,2,1,1),(3,6,3,2)\}$ de $\mathbb{R}^4$.
   (b) $-2x^3+4x^2-x+5$ y $(1-2x+3x^2-4x^3)$ en la base $B = \{1+4x+2x^2+x^3, 1+3x+2x^2+x^3, 3+2x+x^2+x^3, 3+6x+3x^2+2x^3\}$ de $\mathbb{K}_3[x]$ con $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_7$.

2. Analizar cuáles de estos subconjuntos son subespacios vectoriales. Para los que lo sean, calcular una base y su dimensión.

   (a) $W = \{(x,y,z) \mid x,y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}\}$ en $\mathbb{R}^3$. (b) $W = \{(x,y,z) \mid 2x+y+1=0\}$ en $\mathbb{R}^3$.
   (c) $W = \{(x,y,z) \mid x-y+z=0, x+y-z=0\}$ en ${\mathbb{Z}_{11}}^3$. (d) $W = \{(x,y,z) \mid 3xy=1\}$ en ${\mathbb{Z}_{11}}^3$.

3. Determinar unas ecuaciones implícitas para cada uno de los siguientes subespacios vectoriales dados en forma paramétrica:

   (a) $S = \mathcal{L}(\{(2,-3,4)\})$ en $\mathbb{R}^3$.
   (b) $S = \mathcal{L}(\{(1,2,-2,-1),(3,6,-3,5)\})$ en ${\mathbb{Z}_7}^4$.
   (c) $S = \mathcal{L}(\{(1,2,0,1),(0,2,1,-1),(3,0,0,1)\})$ en $\mathbb{R}^4$.

4. Determinar unas ecuaciones paramétricas para cada uno de los siguientes subespacios vectoriales dados en forma implícita:

   (a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0, x+2y-3z=0\}$.
   (b) $S = \{(x,y,z) \in {\mathbb{Z}_7}^3 \mid x-y-2z=0, -x+4y+5z=0, x+5y+4z=0\}$.
   (c) $S = \{(x,y,z,t) \in {\mathbb{Z}_{11}}^4 \mid x-2y+5z-t=0, 2x-2y+z+2t=0, -2x+8z-6t=0\}$.

5. En el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales

$$S_1 = \mathcal{L}(\{(1,2,3,4),(0,1,-1,3),(1,4,1,10)\}) \qquad S_2 = \left\{ \begin{array}{l} x+2y-z+2t=0 \\ x-y+3z=0 \\ -2x+4y-t=0 \end{array} \right\}$$

   (a) Dar unas ecuaciones implícitas de S_1.
   (b) Dar la dimensión y una base de $S_1 \cap S_2$ y de $S_1 + S_2$. ¿Es suma directa?

6. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 2 & -4 & 4 \\ -5 & 5 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R}),$$

   se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ dada por $f(X) = A \cdot X$.

   (a) Determinar la imagen del subespacio $S = \{(x,y,z,s,t) \in \mathbb{R}^5 \mid x+3y+2z+5t=0, x-2z+3s-2t=0\} \subset \mathbb{R}^5$.
   (b) Dado el subespacio $T = \mathcal{L}(\{(2,3,4,1),(0,4,4,3)\}) \subset \mathbb{R}^4$, determinar $f^{-1}(T)$.
   (c) Dar ecuaciones implícitas (minimales) del núcleo y la imagen de f.

EJERCICIOS DE PROFUNDIZACIÓN

1. Para $\mathbb{R}_n[x]$ el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que n:

   (a) Demostrar que el *operador derivada* $\frac{d}{dx} : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ es una aplicación lineal.
   (b) Obtener la matriz de la aplicación anterior respecto de $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$
   (c) Determinar el núcleo y la imagen de la aplicación anterior y sus dimensiones.
   (d) ¿Cuál es el rango del *operador derivada k-ésima* $\frac{d^k}{(dx)^k} : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$?