Práctica 6-1: Sistemas generadores, independencia lineal y bases.

EJERCICIOS BÁSICOS

1. Demostrar que si $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es una base del espacio vectorial V, entonces cualquier vector de V se puede expresar *de forma única* como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$.

2. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

   (a) Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente y $v \notin \mathcal{L}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, entonces $\{u_1, u_2, \ldots, u_k, v\}$ es linealmente independiente.

   (b) Si $\dim V = n$, un conjunto de más de n vectores es sistema de generadores.

3. Determinar, en el espacio vectorial V indicado, cuáles de los siguientes subconjuntos son sistema generador, linealmente independientes y/o base.

   (a) $\{(0,1,0,1), (1,2,0,1), (1,2,3,1), (3,5,3,2)\}$ en $V = \mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$.

   (b) $\{(0,1,0,1), (1,2,0,1), (1,2,3,1), (2,3,3,2)\}$ en $V = \mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$.

   (c) $\{(0,1,0,1), (1,2,0,1), (1,2,3,1), (2,3,3,2)\}$ en $V = {\mathbb{Z}_3}^4$ sobre $\mathbb{Z}_3$.

   (d) $\{(0,1,0,1), (1,2,0,1), (1,2,3,1), (2,3,3,2), (-3,5,2,9)\}$ en $V = \mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$.

   (e) $\{(1+i, 0), (i, 1), (1, i)\}$ en $V = \mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$.

4. Decidir:

   (a) Para qué valores de $m \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{(1, m, 0), (m, 2m, 1), (1, 0, m+2)\} \subset \mathbb{R}^3$ es sistema generador, linealmente independiente y/o base.

   (b) Para qué valores de $m \in \mathbb{Z}_3$ el conjunto $\{(1, m, 0), (1, 1, 2m+1), (1, m+2, 2m)\} \subset {\mathbb{Z}_3}^3$ es sistema generador, linealmente independiente y/o base.

5. Estudiar si son sistema generador, linealmente independientes y/o bases:

   (a) $\{3x^2 + 2x + 1, x + 4, 2x^2 + 2\}$ en el conjunto de polinomios de $\mathbb{Z}_5[x]$ con grado ≤ 2.

   (b)
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
   en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)$.

6. Sea $\mathbb{Q}_n[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n y con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Consideremos el polinomio $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.

   (a) Demostrar que el conjunto $B = \{p(x), p'(x), p''(x), p'''(x)\}$ es una base de $\mathbb{Q}_3[x]$.

   (b) Determinar las coordenadas del polinomio $q(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ en la base B.

EJERCICIOS DE REFUERZO

1. Determinar si $V = \mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial:

   (a) Con las operaciones $(a, b) + (c, d) = (a + c, b - d)$ y $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$.

   (b) Con las operaciones $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ y $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda^2 b)$.

2. Determinar $\mathcal{L}(\{1, x-3, x^2-2x-3\})$ en el conjunto de polinomios de $\mathbb{R}[x]$ con grado ≤ 2.

3. Determinar, en el espacio vectorial V indicado, cuáles de los siguientes subconjuntos son sistema generador, linealmente independientes y/o base.

   (a) $\{(0,1,0,1),(1,2,0,1),(1,2,3,1),(1,2,3,1),(2,3,3,2)\}$ en $V=\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$.

   (b) $\{(2,4,-1,4),(2,-2,0,1),(-2,3,-2,1),(1,-3,-2,4)\}$ en $V={\mathbb{Z}_7}^4$ sobre $\mathbb{Z}_7$.

   (c) $\{1, 2x, 3x^2, \ldots, nx^n\}$ en $V=\mathbb{R}_n[x]$ sobre $\mathbb{R}$.

   (d) $\{(1+i,\sqrt{2}),(i,1),(1,i)\}$ en $V=\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$.

4. Decidir para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{(1,a,0),(a,a,1),(1,0,a+1)\} \subset \mathbb{R}^3$ es linealmente independiente.

5. Determinar m y n para que los vectores $(1,-1,0,-m),(4,-2,n,-1)$, y $(-3,5,m,-8)$ sean linealmente dependientes.

6. Estudiar si son sistema generador, linealmente independientes y/o bases:

   (a) $\{2x^2+x+2, x+1, x^2+1\}$ en el conjunto de polinomios de $\mathbb{Z}_3[x]$ con grado ≤ 2.

   (b)
   $$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$
   en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_7)$.

7. Extraer una base del sistema generador $\{(1,0,2),(2,1,0),(0,3,5),(4,1,2)\}$ de $V=\mathbb{R}^3$.

EJERCICIOS DE PROFUNDIZACIÓN

1. Investigar la complexificación de un espacio vectorial real.

2. Investigar si $\mathbb{K}[x]\,/\langle p(x)\rangle$ con $p(x)$ irreducible es o no un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. En caso de serlo, ¿cuál sería su dimensión?