Álgebra (Ingeniería Informática) **Curso 2007-2008**

Práctica 1-1: Preliminares
EJERCICIOS BÁSICOS

1. (**1.7:27**) Dados dos conjuntos A y B, se llama *diferencia simétrica* de ambos, denotada $A \triangle B$, al conjunto
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$
Demostrar que $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

2. (**1.8:25a–26**) Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ aplicaciones. Demostrar que:
   (a) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
   (b) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva y g puede no serlo.

3. Sean $f : A \to B$ una aplicación y $S \subset A$. Demostrar que $S \subset f^{-1}(f(S))$, y si f es inyectiva se da la igualdad.

4. Sea $f : A \to B$ sobreyectiva (con A no vacío).
   (a) Demostrar que, para $x, y \in A$, la relación R_f dada por
   $$x \, R_f \, y \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = f(y)$$
   es una relación de equivalencia en A.
   (b) Dar una biyección entre A/R_f y B.
   (c) Si $f : \mathbb{Z} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ viene dada por $f(x) =$ "resto de dividir x entre 7", describir explícitamente la biyección del apartado anterior.

5. Supongamos definida una relación de orden $\leq$ en un conjunto A. Demostrar que entonces la relación
$$(\alpha_1, \alpha_2) \, R \, (\beta_1, \beta_2) \Longleftrightarrow \alpha_1 \leq \beta_1 \text{ y } \alpha_2 \leq \beta_2$$
es una relación de orden en $A \times A$.
Si $\leq$ es un orden total en A, ¿lo es también R en $A \times A$?

Práctica 1-1: Preliminares
EJERCICIOS DE REFUERZO

1. (**1.7:8–9**) Demostrar que
   (a) $A \cap (A \cup B) = A$
   (b) $A \cup (A \cap B) = A$
2. (**1.7:17**) Demostrar que
   (a) $A \cap (B_1 \cup B_2) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$
   (b) $A \cup (B_1 \cap B_2) = (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2)$
3. (**1.8:12–13**) Sean $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ y $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definidas por $f(n) = n^3$ y $g(n) = n^2 + 1$.
   (a) Estudiar si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.
   (b) Describir las aplicaciones $g \circ f$ y $f \circ g$ y comprobar que no son iguales. (Esto demuestra que la composición de aplicaciones no es, en general, conmutativa).
4. (**1.8:25b–27**) Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ aplicaciones. Demostrar que:
   (a) Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
   (b) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva pero f puede no serlo.
5. Sean $f : A \to B$ una aplicación y $T \subset B$. Demostrar que $f(f^{-1}(T)) \subset T$, y si f es sobreyectiva se da la igualdad.
6. Consideremos la siguiente relación en el conjunto $\mathbb{R}^3$:
   $$(x, y, w)\, R\, (x', y', w') \quad \Leftrightarrow \quad \text{existe } \lambda \neq 0 \text{ tal que } (x, y, w) = \lambda(x', y', w').$$
   (a) Demostrar que es una relación de equivalencia.
   (b) ¿Cuál es la clase de equivalencia de $(x, y, 1)$? ¿Y la de $(x, y, 0)$?
7. Dada la siguiente relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0, 0)\}$
   $$(a, b)\ R\ (c, d) \Longleftrightarrow ad = bc,$$
   probar que es una relación de equivalencia. ¿Cuál es el conjunto cociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0, 0)\})/R$?
8. Dados $(A_1, \leq_1)$ y $(A_2, \leq_2)$ con $\leq_1, \leq_2$ relaciones de orden, en $A_1 \times A_2$ se define el *orden lexicográfico* $\preceq$ mediante
   $$(a_1, a_2) \preceq (b_1, b_2) \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \text{o bien } a_1 <_1 b_1 \\ \text{o bien } a_1 = b_1 \text{ y } a_2 \leq_2 b_2 \end{array}$$
   Demostrar que, efectivamente, $\preceq$ es una relación de orden en $A_1 \times A_2$.
9. (**7.6:47**) Demostrar que $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq)$, con $\preceq$ el orden lexicográfico, está bien ordenado.

Álgebra (Ingeniería Informática) **Curso 2007-2008**

Práctica 1-1: Preliminares
EJERCICIOS DE PROFUNDIZACIÓN

1. Demostrar que $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

2. (**1.8:32–33–36**) Sean $f : A \to B$ una aplicación, $A_1, A_2 \subseteq A$ y $B_1, B_2 \subseteq B$. Demostrar que

   (a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
   (b) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. Encontrar un ejemplo en que no se dé la igualdad.
   (c) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
   (d) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
   (e) $f^{-1}(B_1^c) = \left[f^{-1}(B_1)\right]^c$

3. (**1.8:63**) Sean S, U conjuntos con $S \subset U$. La *función característica de* S se define como

$$\begin{array}{rccc} f_S: & U & \to & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1, & \text{si } x \in S \\ 0, & \text{si } x \notin S \end{cases} \end{array}$$

   Demostrar que para cualesquiera $A, B \subset U$ y para cualquier $x \in U$ se tiene:

   (a) $f_{A\cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$
   (b) $f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x)$
   (c) $f_{A^c}(x) = 1 - f_A(x)$
   (d) $f_{A\triangle B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - 2 \cdot f_A(x) \cdot f_B(x)$

4. (**7.5:45**) Sea R la siguiente relación de equivalencia en el conjunto de todas las formas de colorear un tablero de ajedrez de tamaño 2×2 asignando a cada uno de los cuatro cuadrados bien el color rojo o bien el color azul: Para dos tableros C_1 y C_2 en esas condiciones,

$$(C_1, C_2) \in R \Longleftrightarrow \begin{array}{l} C_2 \text{ puede obtenerse a partir de } C_1 \text{ mediante una rotación} \\ \text{o bien mediante una rotación seguida de una reflexión.} \end{array}$$

   (a) Demostrar que R es una relación de equivalencia.
   (b) ¿Cuáles son las clases de equivalencia de R?

5. (**7.6:49**) Un conjunto parcialmente ordenado $(S, \preceq)$ está *bien fundamentado* si no hay ninguna sucesión infinita decreciente de elementos del conjunto. Es decir, si no hay elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ tales que $\cdots \prec x_n \prec \cdots \prec x_2 \prec x_1$.
   Demostrar que el conjunto $(\mathbb{Z}, \preceq)$, donde $x \preceq y \Leftrightarrow |x| \leq |y|$, está bien fundamentado pero no está totalmente ordenado.