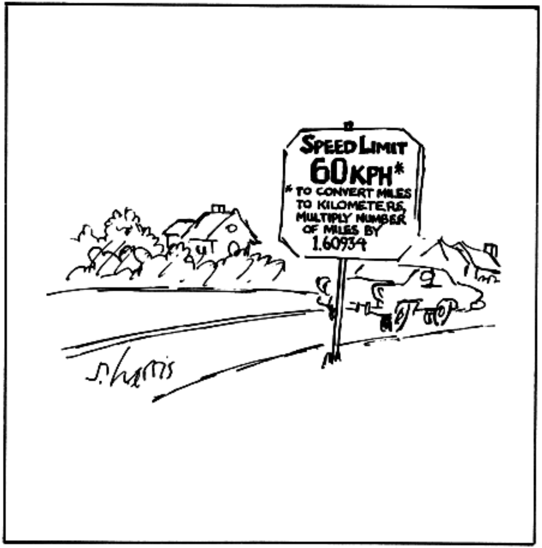
Curso cero "Matemáticas en informática": Sistemas de ecuaciones lineales

David Orden
Dep. Matemáticas
UAH

Septiembre 2005

Sistemas


SPEED LIMIT
60 KPH*
* TO CONVERT MILES TO KILOMETERS, MULTIPLY NUMBER OF MILES BY 1.60934
S. Harris

- Se llama ecuación lineal con n incógnitas a

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ son los coeficientes y $b \in \mathbb{R}$ el término independiente.

- Se llama ecuación lineal con n incógnitas a

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ son los coeficientes y $b \in \mathbb{R}$ el término independiente.

- Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es

$$\left\{ \begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}$$

- Se llama ecuación lineal con n incógnitas a

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ son los coeficientes y $b \in \mathbb{R}$ el término independiente.

- Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es

$$\left\{ \begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}$$

- Equivalentemente, el sistema se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

y vamos a trabajar con él en esta forma $Ax = b$.

- Un sistema es homogéneo cuando todos los b_i son 0.

- Un sistema es **homogéneo** cuando todos los b_i son 0.
- Se llama **sistema incompatible** al que no tiene solución. En caso contario, se dice **compatible**:

- Un sistema es homogéneo cuando todos los b_i son 0.
- Se llama sistema incompatible al que no tiene solución. En caso contario, se dice compatible:
  - Si la solución es única, compatible determinado.

- Un sistema es homogéneo cuando todos los b_i son 0.
- Se llama sistema incompatible al que no tiene solución. En caso contario, se dice compatible:
  - Si la solución es única, compatible determinado.
  - Si no, tiene infinitas soluciones, y se llama compatible indeterminado.

- Un sistema es homogéneo cuando todos los b_i son 0.
- Se llama sistema incompatible al que no tiene solución. En caso contario, se dice compatible:
  - Si la solución es única, compatible determinado.
  - Si no, tiene infinitas soluciones, y se llama compatible indeterminado.
- Todo sistema homogéneo es compatible, pues siempre admite la solución

- Un sistema es homogéneo cuando todos los b_i son 0.
- Se llama sistema incompatible al que no tiene solución. En caso contario, se dice compatible:
  - Si la solución es única, compatible determinado.
  - Si no, tiene infinitas soluciones, y se llama compatible indeterminado.
- Todo sistema homogéneo es compatible, pues siempre admite la solución $x_i = 0, \forall i$.

- Un sistema es homogéneo cuando todos los b_i son 0.
- Se llama sistema incompatible al que no tiene solución. En caso contario, se dice compatible:
    - Si la solución es única, compatible determinado.
    - Si no, tiene infinitas soluciones, y se llama compatible indeterminado.
- Todo sistema homogéneo es compatible, pues siempre admite la solución $x_i = 0, \forall i$.
- Dos sistemas son equivalentes si admiten las mismas soluciones.

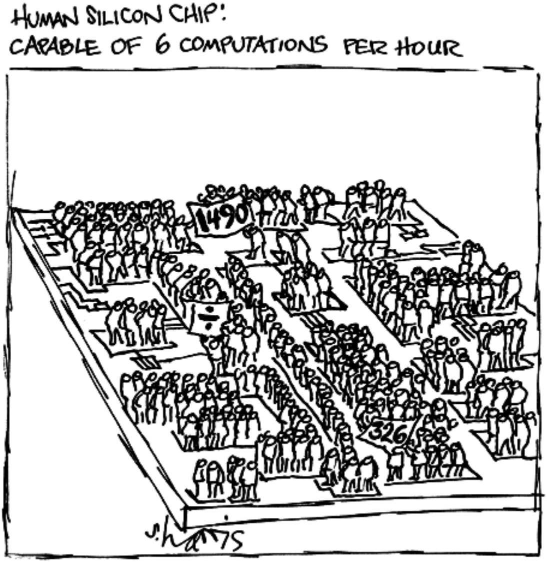
- Un sistema es homogéneo cuando todos los b_i son 0.
- Se llama sistema incompatible al que no tiene solución. En caso contario, se dice compatible:
  - Si la solución es única, compatible determinado.
  - Si no, tiene infinitas soluciones, y se llama compatible indeterminado.
- Todo sistema homogéneo es compatible, pues siempre admite la solución $x_i = 0, \forall i$.
- Dos sistemas son equivalentes si admiten las mismas soluciones. Las operaciones elementales en la matriz ampliada $(A|b)$ del sistema dan lugar a sistemas equivalentes.

- Un sistema es homogéneo cuando todos los b_i son 0.
- Se llama sistema incompatible al que no tiene solución. En caso contario, se dice compatible:
  - Si la solución es única, compatible determinado.
  - Si no, tiene infinitas soluciones, y se llama compatible indeterminado.
- Todo sistema homogéneo es compatible, pues siempre admite la solución $x_i = 0, \forall i$.
- Dos sistemas son equivalentes si admiten las mismas soluciones. Las operaciones elementales en la matriz ampliada $(A|b)$ del sistema dan lugar a sistemas equivalentes.
- **Ejemplo:**

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \end{array}\right) \overset{F_2-2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x-y=5 \\ 4x+3y=5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 4x-2y=10 \\ 4x+3y=5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 4x-2y=10 \\ 5y=-5 \end{array}\right\}$$

Sistemas


HUMAN SILICON CHIP:
CAPABLE OF 6 COMPUTATIONS PER HOUR
1490
326

- **Método de Gauss:** (m y n cualesquiera)

- **Método de Gauss:** (m y n cualesquiera)

  Operaciones elementales en la matriz ampliada para obtener un sistema equivalente triangular superior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 4 & 5 & -5 & 3 \\ -2 & 6 & -2 & -7 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + y - z = 6 \\ 4x + 5y - 5z = 3 \\ -2x + 6y - 2z = -7 \end{array}\right\}$$

- **Método de Gauss:** (m y n cualesquiera)

  Operaciones elementales en la matriz ampliada para obtener un sistema equivalente triangular superior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 4 & 5 & -5 & 3 \\ -2 & 6 & -2 & -7 \end{array}\right) \underset{\sim}{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3+F_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 7 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+y-z=6 \\ 4x+5y-5z=3 \\ -2x+6y-2z=-7 \end{array}\right\}$$

- **Método de Gauss:** (m y n cualesquiera)

  Operaciones elementales en la matriz ampliada para obtener un sistema equivalente triangular superior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 4 & 5 & -5 & 3 \\ -2 & 6 & -2 & -7 \end{array}\right) \underset{F_3 + F_1}{\overset{F_2 - 2F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 7 & -3 & -1 \end{array}\right) \overset{F_3 - \frac{7}{3}F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + y - z = 6 \\ 4x + 5y - 5z = 3 \\ -2x + 6y - 2z = -7 \end{array}\right\}$$

- **Método de Gauss:** (m y n cualesquiera)

  Operaciones elementales en la matriz ampliada para obtener un sistema equivalente triangular superior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 4 & 5 & -5 & 3 \\ -2 & 6 & -2 & -7 \end{array}\right) \underset{F_3+F_1}{\overset{F_2-2F_1}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 7 & -3 & -1 \end{array}\right) \overset{F_3-\frac{7}{3}F_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+y-z=6 \\ 4x+5y-5z=3 \\ -2x+6y-2z=-7 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+y-z=6 \\ 3y-3z=-9 \\ 4z=20 \end{array}\right\}$$

- **Método de Gauss:** (m y n cualesquiera)

  Operaciones elementales en la matriz ampliada para obtener un sistema equivalente triangular superior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 4 & 5 & -5 & 3 \\ -2 & 6 & -2 & -7 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{F_2-2F_1}{F_3+F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 7 & -3 & -1 \end{array}\right) \overset{F_3-\frac{7}{3}F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+y-z=6 \\ 4x+5y-5z=3 \\ -2x+6y-2z=-7 \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{r} 2x+y-z=6 \\ 3y-3z=-9 \\ 4z=20 \end{array}\right\}$$

- Si el sistema es incompatible, obtendremos una matriz de la forma $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right)$

- **Método de Gauss:** (m y n cualesquiera)

  Operaciones elementales en la matriz ampliada para obtener un sistema equivalente triangular superior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 4 & 5 & -5 & 3 \\ -2 & 6 & -2 & -7 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 7 & -3 & -1 \end{array}\right) \overset{F_3 - \frac{7}{3}F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + y - z = 6 \\ 4x + 5y - 5z = 3 \\ -2x + 6y - 2z = -7 \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{r} 2x + y - z = 6 \\ 3y - 3z = -9 \\ 4z = 20 \end{array}\right\}$$

- Si el sistema es incompatible, obtendremos una matriz de la forma $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right)$
- Si el sistema es compatible indeterminado, obtendremos una matriz de la forma

- **Método de Gauss:** (m y n cualesquiera)

  Operaciones elementales en la matriz ampliada para obtener un sistema equivalente triangular superior.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 4 & 5 & -5 & 3 \\ -2 & 6 & -2 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1 \\ \sim \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{r} 2x + y - z = 6 \\ 4x + 5y - 5z = 3 \\ -2x + 6y - 2z = -7 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 7 & -3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_3 - \frac{7}{3}F_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{array}\right) \qquad \left\{ \begin{array}{r} 2x + y - z = 6 \\ 3y - 3z = -9 \\ 4z = 20 \end{array} \right.$$

- Si el sistema es incompatible, obtendremos una matriz de la forma $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right)$

- Si el sistema es compatible indeterminado, obtendremos una matriz de la forma

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \end{array}\right) \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 2x + y = 6 + z \\ 3y = -9 + 3z \end{array} \right.$$

- **Método de Gauss:** (m y n cualesquiera)

  Operaciones elementales en la matriz ampliada para obtener un sistema equivalente triangular superior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 4 & 5 & -5 & 3 \\ -2 & 6 & -2 & -7 \end{array}\right) \underset{\sim}{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3+F_1}} \qquad \left\{\begin{array}{r} 2x+y-z=6 \\ 4x+5y-5z=3 \\ -2x+6y-2z=-7 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 7 & -3 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_3-\frac{7}{3}F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{array}\right) \qquad \left\{\begin{array}{r} 2x+y-z=6 \\ 3y-3z=-9 \\ 4z=20 \end{array}\right\}$$

- Si el sistema es incompatible, obtendremos una matriz de la forma $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right)$

- Si el sistema es compatible indeterminado, obtendremos una matriz de la forma (parámetro z)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \end{array}\right) \leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x+y=6+z \\ 3y=-9+3z \end{array}\right\}$$

- **Método de Gauss:** (m y n cualesquiera)

  Operaciones elementales en la matriz ampliada para obtener un sistema equivalente triangular superior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 4 & 5 & -5 & 3 \\ -2 & 6 & -2 & -7 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3+F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 7 & -3 & -1 \end{array}\right) \overset{F_3-\frac{7}{3}F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+y-z=6 \\ 4x+5y-5z=3 \\ -2x+6y-2z=-7 \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{r} 2x+y-z=6 \\ 3y-3z=-9 \\ 4z=20 \end{array}\right\}$$

- Si el sistema es incompatible, obtendremos una matriz de la forma $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right)$
- Si el sistema es compatible indeterminado, obtendremos una matriz de la forma (parámetro z)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \end{array}\right) \leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x+y=6+z \\ 3y=-9+3z \end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{9}{2} \\ y=-3+z \end{array}\right\}$$

- **Método de Gauss-Jordan:** (m y n cualesquiera)

- **Método de Gauss-Jordan:** (m y n cualesquiera)
  Operaciones elementales en la matriz ampliada para obtener un sistema equivalente diagonal.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 4 & 5 & -5 & 3 \\ -2 & 6 & -2 & -7 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+y-z=6 \\ 4x+5y-5z=3 \\ -2x+6y-2z=-7 \end{array}\right\}$$

- **Método de Gauss-Jordan:** (m y n cualesquiera)
  Operaciones elementales en la matriz ampliada para obtener un sistema equivalente diagonal.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 4 & 5 & -5 & 3 \\ -2 & 6 & -2 & -7 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3+F_1}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 7 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+y-z=6 \\ 4x+5y-5z=3 \\ -2x+6y-2z=-7 \end{array}\right\}$$

- **Método de Gauss-Jordan:** (m y n cualesquiera)
  Operaciones elementales en la matriz ampliada para obtener un sistema equivalente diagonal.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 4 & 5 & -5 & 3 \\ -2 & 6 & -2 & -7 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 7 & -3 & -1 \end{array}\right) \overset{F_3 - \frac{7}{3}F_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + y - z = 6 \\ 4x + 5y - 5z = 3 \\ -2x + 6y - 2z = -7 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + y - z = 6 \\ 3y - 3z = -9 \\ 4z = 20 \end{array}\right\}$$

- **Método de Gauss-Jordan:** (m y n cualesquiera)
  Operaciones elementales en la matriz ampliada para obtener un sistema equivalente diagonal.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 4 & 5 & -5 & 3 \\ -2 & 6 & -2 & -7 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 7 & -3 & -1 \end{array}\right) \overset{F_3 - \frac{7}{3}F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2 + \frac{3}{4}F_3 \\ F_1 + \frac{1}{4}F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + y - z = 6 \\ 4x + 5y - 5z = 3 \\ -2x + 6y - 2z = -7 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + y - z = 6 \\ 3y - 3z = -9 \\ 4z = 20 \end{array}\right\}$$

- **Método de Gauss-Jordan:** (m y n cualesquiera)
  Operaciones elementales en la matriz ampliada para obtener un sistema equivalente diagonal.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 4 & 5 & -5 & 3 \\ -2 & 6 & -2 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1 \\ \sim \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{r} 2x + y - z = 6 \\ 4x + 5y - 5z = 3 \\ -2x + 6y - 2z = -7 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 7 & -3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_3 - \frac{7}{3}F_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 + \frac{3}{4}F_3 \\ F_1 + \frac{1}{4}F_3 \\ \sim \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{r} 2x + y - z = 6 \\ 3y - 3z = -9 \\ 4z = 20 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1 - \frac{1}{3}F_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{array}\right) \qquad \left\{ \begin{array}{r} 2x = 9 \\ 3y = 6 \\ 4z = 20 \end{array} \right\}$$

- **Método de Gauss-Jordan:** (m y n cualesquiera)
  Operaciones elementales en la matriz ampliada para obtener un sistema equivalente diagonal.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 4 & 5 & -5 & 3 \\ -2 & 6 & -2 & -7 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3+F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 7 & -3 & -1 \end{array}\right) \overset{F_3-\frac{7}{3}F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2+\frac{3}{4}F_3 \\ F_1+\frac{1}{4}F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{array}\right) \overset{F_1-\frac{1}{3}F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+y-z=6 \\ 4x+5y-5z=3 \\ -2x+6y-2z=-7 \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{r} 2x+y-z=6 \\ 3y-3z=-9 \\ 4z=20 \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{r} 2x=9 \\ 3y=6 \\ 4z=20 \end{array}\right\}$$

- No siempre es posible. Por ejemplo para

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right)$$

- **Método de la inversa:** $(m = n)$

- **Método de la inversa:** $(m = n)$

  Para resolver $Ax = b$, calcular A^{-1} y obtener $x = A^{-1}b$.

$$\text{Para resolver} \left\{ \begin{aligned} x - 2y + 4z &= 1 \\ y - 2z &= 2 \\ -2x + 4y - 7z &= 3 \end{aligned} \right\}$$

- **Método de la inversa:** $(m = n)$
  Para resolver $Ax = b$, calcular A^{-1} y obtener $x = A^{-1}b$.

Para resolver $\left\{ \begin{array}{r} x - 2y + 4z = 1 \\ y - 2z = 2 \\ -2x + 4y - 7z = 3 \end{array} \right\}$

se hace $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}^{-1} =$

- **Método de la inversa:** $(m = n)$

  Para resolver $Ax = b$, calcular A^{-1} y obtener $x = A^{-1}b$.

Para resolver $\left\{ \begin{array}{r} x - 2y + 4z = 1 \\ y - 2z = 2 \\ -2x + 4y - 7z = 3 \end{array} \right\}$

se hace $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **Método de la inversa:** $(m = n)$
  Para resolver $Ax = b$, calcular A^{-1} y obtener $x = A^{-1}b$.

Para resolver $\left\{ \begin{array}{r} x - 2y + 4z = 1 \\ y - 2z = 2 \\ -2x + 4y - 7z = 3 \end{array} \right\}$

se hace $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Así $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- **Método de la inversa:** $(m = n)$

  Para resolver $Ax = b$, calcular A^{-1} y obtener $x = A^{-1}b$.

Para resolver $\left\{ \begin{array}{r} x - 2y + 4z = 1 \\ y - 2z = 2 \\ -2x + 4y - 7z = 3 \end{array} \right\}$

se hace $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Así $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- Recordar que una de las formas de calcular la inversa usaba Gauss-Jordan.

- **Método de la inversa:** $(m = n)$
  Para resolver $Ax = b$, calcular A^{-1} y obtener $x = A^{-1}b$.

$$\text{Para resolver} \left\{ \begin{array}{r} x - 2y + 4z = 1 \\ y - 2z = 2 \\ -2x + 4y - 7z = 3 \end{array} \right\}$$

$$\text{se hace} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- Recordar que una de las formas de calcular la inversa usaba Gauss-Jordan.
- **Observación:** Sólo funciona si A tiene inversa (es decir, si $\det A \neq 0$).

- **Método de Cramer:** $(m = n)$

- **Método de Cramer:** $(m = n)$

  Utilizando determinantes, $x_i = \frac{B_i}{\det A}$ para

$$B_i = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & i & & \phantom{a_{1n}} \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}$$

Para resolver $\left\{ \begin{array}{r} 5x + 2y = 1 \\ x + y = -1 \end{array} \right\}$ se hace

- **Método de Cramer:** $(m = n)$

  Utilizando determinantes, $x_i = \frac{B_i}{\det A}$ para

$$\begin{array}{c} \\ B_i = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & i & & \phantom{a_{1n}} \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| \end{array}$$

Para resolver $\left\{ \begin{array}{c} 5x + 2y = 1 \\ x + y = -1 \end{array} \right\}$ se hace

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

- **Método de Cramer:** $(m = n)$

  Utilizando determinantes, $x_i = \frac{B_i}{\det A}$ para

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & & i & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ B_i = & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}$$

Para resolver $\left\{ \begin{array}{c} 5x + 2y = 1 \\ x + y = -1 \end{array} \right\}$ se hace

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{3} = 1$$

- **Método de Cramer:** $(m = n)$

  Utilizando determinantes, $x_i = \frac{B_i}{\det A}$ para

$$B_i = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & i & & \phantom{a_{1n}} \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}$$

Para resolver $\left\{ \begin{array}{c} 5x + 2y = 1 \\ x + y = -1 \end{array} \right\}$ se hace

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{3} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

- **Método de Cramer:** $(m = n)$

  Utilizando determinantes, $x_i = \frac{B_i}{\det A}$ para

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & i & & \phantom{a_{1n}} \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\
B_i = & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
\end{array}
$$

Para resolver $\left\{ \begin{array}{c} 5x + 2y = 1 \\ x + y = -1 \end{array} \right\}$ se hace

$$
x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{3} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{3} = -2
$$

Ejercicios:

1. Resolver, por todos los métodos posibles, el sistema
$$\left\{\begin{array}{r} x+y-z+t=2 \\ 2x+3y-4z+5t=5 \\ 3y+z+2t=10 \\ x-4y-3z+4t=9 \end{array}\right\}$$

2. Resolver, por todos los métodos posibles, el sistema
$$\left\{\begin{array}{r} x+y-z+t=4 \\ 2x-3y-4z+5t=0 \\ 15y+5z+10t=25 \\ x-4y-3z+4t=-4 \end{array}\right\}$$

3. Resolver, por todos los métodos posibles, el sistema
$$\left\{\begin{array}{r} x-3y+4z+2t=5 \\ -x+2y-2z+4t=3 \\ -3x+4y+2z+3t=-1 \\ -5x+5y+8z+8t=0 \end{array}\right\}$$

Rouché-Fröbenius

"...and, as you go out into the world, I predict that you will, gradually and inperceptibly, forget all you ever learned at this university."

- En la sección anterior vimos que el método de Gauss permite decidir si un sistema es compatible o no.

- En la sección anterior vimos que el método de Gauss permite decidir si un sistema es compatible o no.
- El **Teorema de Rouché-Fröbenius** afirma:

$$Ax = b \text{ compatible} \iff \text{rango}(A) = \text{rango}(A|b)$$

- En la sección anterior vimos que el método de Gauss permite decidir si un sistema es compatible o no.
- El **Teorema de Rouché-Fröbenius** afirma:
  $$Ax = b \text{ compatible} \iff \text{rango}(A) = \text{rango}(A|b)$$
- De hecho, para n incógnitas:

- En la sección anterior vimos que el método de Gauss permite decidir si un sistema es compatible o no.
- El **Teorema de Rouché-Fröbenius** afirma:

$$Ax = b \text{ compatible} \iff \text{rango}(A) = \text{rango}(A|b)$$

- De hecho, para n incógnitas:

$\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A|b)$
Sistema incompatible
(S.I.)

- En la sección anterior vimos que el método de Gauss permite decidir si un sistema es compatible o no.
- El **Teorema de Rouché-Fröbenius** afirma:

$$Ax = b \text{ compatible} \iff \text{rango}(A) = \text{rango}(A|b)$$

- De hecho, para n incógnitas:

$\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A|b)$	$\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = r$
Sistema incompatible (S.I.)	Sistema compatible

- En la sección anterior vimos que el método de Gauss permite decidir si un sistema es compatible o no.
- El **Teorema de Rouché-Fröbenius** afirma:

$$Ax = b \text{ compatible} \iff \text{rango}(A) = \text{rango}(A|b)$$

- De hecho, para n incógnitas:

$\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A\|b)$	$\text{rango}(A) = \text{rango}(A\|b) = r$
Sistema incompatible (S.I.)	Sistema compatible
	$r = n$ Determinado (S.C.D.)

- En la sección anterior vimos que el método de Gauss permite decidir si un sistema es compatible o no.
- El **Teorema de Rouché-Fröbenius** afirma:

$$Ax = b \text{ compatible} \iff \text{rango}(A) = \text{rango}(A|b)$$

- De hecho, para n incógnitas:

$\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A|b)$
Sistema incompatible
(S.I.)

$\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = r$
Sistema compatible

$r = n$
Determinado
(S.C.D.)

$r < n$
Indeterminado
(S.C.I.)
con $n - r$
parámetros

Discutir el sistema $\left\{ \begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2y + 5z = 0 \\ -x + 10y - 9z = 1 \end{array} \right\}$

Discutir el sistema $\left\{ \begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ x-2y+5z=0 \\ -x+10y-9z=1 \end{array} \right\}$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix} =$$

Discutir el sistema $\left\{ \begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2y + 5z = 0 \\ -x + 10y - 9z = 1 \end{array} \right\}$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix} = 2$$

Discutir el sistema $\left\{ \begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ x-2y+5z=0 \\ -x+10y-9z=1 \end{array} \right\}$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ -1 & 10 & -9 & 1 \end{pmatrix} =$$

Discutir el sistema $\left\{ \begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2y + 5z = 0 \\ -x + 10y - 9z = 1 \end{array} \right\}$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ -1 & 10 & -9 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

David Orden
Dep. Matemáticas
UAH

Discutir el sistema $\left\{ \begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ x-2y+5z=0 \\ -x+10y-9z=1 \end{array} \right\}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix} = 2 \\ \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ -1 & 10 & -9 & 1 \end{pmatrix} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{S.I.}$$

Discutir el sistema $\left\{ \begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ x-2y+5z=0 \\ -x+10y-9z=1 \end{array} \right\}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix} = 2 \\ \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ -1 & 10 & -9 & 1 \end{pmatrix} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{S.I.}$$

Discutir, en función de λ, $\left\{ \begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ x-2y+5z=0 \\ -x+10y-9z=\lambda \end{array} \right\}$

Discutir el sistema $\left\{ \begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ x-2y+5z=0 \\ -x+10y-9z=1 \end{array} \right\}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix} = 2 \\ \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ -1 & 10 & -9 & 1 \end{pmatrix} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{S.I.}$$

Discutir, en función de λ, $\left\{ \begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ x-2y+5z=0 \\ -x+10y-9z=\lambda \end{array} \right\}$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix} =$$

Discutir el sistema $\left\{ \begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ x-2y+5z=0 \\ -x+10y-9z=1 \end{array} \right\}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix} = 2 \\ \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ -1 & 10 & -9 & 1 \end{pmatrix} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{S.I.}$$

Discutir, en función de λ, $\left\{ \begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ x-2y+5z=0 \\ -x+10y-9z=\lambda \end{array} \right\}$

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix} = 2$$

Discutir el sistema $\left\{ \begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ x-2y+5z=0 \\ -x+10y-9z=1 \end{array} \right\}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix} = 2 \\ \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ -1 & 10 & -9 & 1 \end{pmatrix} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{S.I.}$$

Discutir, en función de λ, $\left\{ \begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ x-2y+5z=0 \\ -x+10y-9z=\lambda \end{array} \right\}$

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ -1 & 10 & -9 & \lambda \end{pmatrix} =$$

Discutir el sistema $\left\{\begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ x-2y+5z=0 \\ -x+10y-9z=1 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix} = 2 \\ \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ -1 & 10 & -9 & 1 \end{pmatrix} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{S.I.}$$

Discutir, en función de λ, $\left\{\begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ x-2y+5z=0 \\ -x+10y-9z=\lambda \end{array}\right\}$

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ -1 & 10 & -9 & \lambda \end{pmatrix} = \left\{\begin{array}{l} 3 \text{ si } \lambda \neq 2 \\ 2 \text{ si } \lambda = 2 \end{array}\right.$$

Discutir el sistema $\left\{ \begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ x-2y+5z=0 \\ -x+10y-9z=1 \end{array} \right\}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix} = 2 \\ \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ -1 & 10 & -9 & 1 \end{pmatrix} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ S.I.}$$

Discutir, en función de λ, $\left\{ \begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ x-2y+5z=0 \\ -x+10y-9z=\lambda \end{array} \right\}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 10 & -9 \end{pmatrix} = 2 \\ \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ -1 & 10 & -9 & \lambda \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ si } \lambda \neq 2 \\ 2 \text{ si } \lambda = 2 \end{array} \right. \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \text{S.I. si } \lambda \neq 2, \quad \text{S.C.I. si } \lambda = 2$$

Ejercicios:

Aplicar Rouché-Fröbenius para discutir los siguientes sistemas. En caso de ser compatibles, resolverlos.

(a) $$\left\{ \begin{array}{r} x+y+z=4 \\ 2x-y+z=-5 \\ 3x+2y+5z=3 \\ 3x-2z=7 \end{array} \right\}$$

(b) $$\left\{ \begin{array}{r} 2x+y+z=5 \\ 2x+y-z=5 \\ 3x+2y+z=11 \\ x+y+2z=10 \end{array} \right\}$$

(c) $$\left\{ \begin{array}{r} 2x-y+z+2t=-5 \\ x+y+z+t=4 \\ 3x+y+z-t=6 \\ 6x+y+3z+2t=5 \end{array} \right\}$$

1

Ejercicios:

Discutir los siguientes sistemas en función del valor del parámetro a:

(a) $$\left\{\begin{array}{r} 2x - ay + z = 1 \\ 4x + (3-a)y + 2z = 4 + a \\ ax + ay + (a+1)z = -1 \end{array}\right\}$$

(b) $$\left\{\begin{array}{r} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \\ x + y + z = a \end{array}\right\}$$

2

Autoevaluación

Antes de seguir, intenta resolver los ejercicios propuestos. Una vez que los hayas intentado, podrás comprobar tus resultados con las soluciones que aparecen a continuación.

Soluciones resolución:

1. Por cualquiera de los métodos, $\{x = 4, y = -1, z = 5, t = 4\}$
2. Sistema compatible indeterminado. Por Gauss, $\{x = 1 + 25t, y = 2 - 7t, z = -1 + 19t, t = t\}$
3. Sistema incompatible.

David Orden
Dep. Matemáticas
UAH

Soluciones Rouché-Fröbenius:

(a) Sistema compatible determinado, con solución $\{x = 1, y = 5, z = -2\}$

(b) Sistema incompatible.

(c) Sistema compatible indeterminado con un grado de libertad. $\{x = 1 + t, y = 5 + t, z = -2 - 3t, t = t\}$

1

Soluciones Rouché-Fröbenius:

(a) $\det A = a^2 + 5a + 6$

- Para $a \neq 2, a \neq 3$, sistema compatible determinado (porque $\det A \neq 0 \Rightarrow$ rango máximo).
- Para $a = 2$, sistema compatible indeterminado con un grado de libertad.
- Para $a = 3$, sistema incompatible.

(b) $\det(A|b) = (a+3)(a-1)^3$

- Para $a \neq -3, a \neq 1$, sistema incompatible.
- Para $a = -3$, sistema compatible determinado.
- Para $a = 1$, sistema compatible indeterminado con dos grados de libertad (equivale a $x + y + z = 1$, tiene solución $x = 1 - y - z, y = y, z = z$).

2

Bibliografía y webs recomendadas

- *Matemáticas Bachillerato 2, Tecnología*, Esther Bescós y Zoila Pena, Ed. Oxford, 1998.
- Página sobre el estudio de sistemas de ecuaciones lineales.
- Dos páginas sobre discusión de sistemas por Rouché-Fröbenius son ésta y ésta otra.