Departamento de Matemáticas, Universidad de Alcalá

Matemática Discreta (ITST, ITSE, ITT) **Refuerzo curso 2006-2007**

Práctica 5
(Diagonalización)

1. Demostrar que para cualquier endomorfismo f se cumple:

$$f \text{ inyectivo } \iff \lambda = 0 \text{ no es autovalor.}$$

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$:

   (a) Calcular sus autovalores.

   (b) Para cada autovalor, calcular su orden (o multiplicidad algebraica).

   (c) Para cada autovalor λ, calcular su subespacio propio $L(\lambda)$.

   (d) Para cada autovalor, calcular su multiplicidad geométrica.

   (e) Decidir si A (o, equivalentemente, el endomorfismo f definido por la matriz A) es diagonalizable.

   (f) Si se puede, expresarla como $A = PDP^{-1}$ con D diagonal.

   (g) Usar, cuando sea posible, el apartado anterior para calcular A^n.

3. Hacer lo mismo para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Hacer lo mismo para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Hacer lo mismo para la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Hacer lo mismo para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

7. Calcular, en función de a, los autovalores de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

   ¿Para qué valores de a es esta matriz diagonalizable?

8. Comprobar que para cualesquiera a y b, los autovalores de $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & b & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ son reales. Responder a todos los apartados del ejercicio 2 para los valores $a = -1, b = 2$.

9. Dada la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (a) Calcular sus autovalores. Comprobar que son reales.

   (b) Para cada autovalor λ, calcular su subespacio propio $L(\lambda)$. Comprobar que cada dos autovectores v_1, v_2 asociados a autovalores distintos λ_1, λ_2 son *ortogonales*, es decir; $v_1^t \cdot v_2 = 0$.

   (c) Expresarla como $A = PDP^{-1}$ para D una matriz diagonal.

   (d) Comprobar que P^tAP es otra matriz diagonal $\bar{D}$ (es decir, que $A = P\bar{D}P^t$).

   (e) Encontrar una matriz Q ortogonal y tal que Q^tAQ sea diagonal. (Pista: hace falta que los vectores sean *ortonormales*, es decir, ortogonales y de norma $||v|| = 1$. Así, Q se obtiene dividiendo cada columna c de P por su norma $||c|| = +\sqrt{c_1^2 + \cdots + c_n^2}$).

10. Hacer lo mismo para $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

11. Hacer lo mismo para $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

12. Hacer los tres primeros apartados para $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Comprobar que ahora P^tAP no es diagonal y razonar por qué.