Práctica 1
(Preliminares)

1. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Demostrar las siguientes afirmaciones:
   (a) $A \cup B$ es el menor conjunto que contiene a A y B.
   (b) $A \cap B$ es el mayor conjunto contenido en A y B.
2. Demostrar que $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$
3. Dados dos conjuntos A y B, se llama *diferencia simétrica* de ambos, denotada $A \triangle B$, al conjunto
   $$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$
   Demostrar que $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
4. Sean $f : A \to B$ una aplicación y $S \subset A$, $T \subset B$. Demostrar:
   (a) $S \subset f^{-1}(f(S))$, y si f es inyectiva se da la igualdad.
   (b) $f(f^{-1}(T)) \subset T$, y si f es sobreyectiva se da la igualdad.
5. Sean $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ y $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definidas por $f(s) = s - 1$ y $g(s) = s^2$.
   (a) Estudiar si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.
   (b) Describir las aplicaciones $g \circ f$ y $f \circ g$ y comprobar que no son iguales. (Esto demuestra que la composición de aplicaciones no es, en general, conmutativa).
6. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ aplicaciones. Demostrar que:
   (a) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
   (b) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva y g puede no serlo.
   (c) Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
   (d) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva pero f puede no serlo.
7. Consideremos la siguiente relación en el conjunto $\mathbb{R}^3$:
   $$(x, y, w)\, R\, (x', y', w') \quad \Leftrightarrow \quad \text{existe } \lambda \neq 0 \text{ tal que } (x, y, w) = \lambda(x', y', w').$$
   (a) Demostrar que es una relación de equivalencia.
   (b) ¿Cuál es la clase de equivalencia de $(x, y, 1)$? ¿Y la de $(x, y, 0)$?
8. Dada la siguiente relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
   $$(a, b)\ R\ (c, d) \Longleftrightarrow ad = bc,$$
   probar que es una relación de equivalencia. ¿Cuál es el conjunto cociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\})/R$?
9. Sea $f : A \to B$ sobreyectiva (con A no vacío).
   (a) Demostrar que, para $x, y \in A$, la relación R_f dada por
   $$x\, R_f\, y \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = f(y)$$
   es una relación de equivalencia en A.
   (b) Dar una biyección entre A/R_f y B.

10. Supongamos definida una relación de orden $\leq$ en un conjunto A. Demostrar que entonces la relación

$$(\alpha_1, \alpha_2)\, R\, (\beta_1, \beta_2) \Longleftrightarrow \alpha_1 \leq \beta_1 \text{ y } \alpha_2 \leq \beta_2$$

es una relación de orden en $A \times A$.
Si $\leq$ es un orden total en A, ¿lo es también R en $A \times A$?

11. Demostrar, utilizando el principio de inducción, que si $|A| = n$ entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

12. Demostrar, usando el principio de inducción:

    (a) $1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$.
    (b) $1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + (n-1)(n-1)! = n!$.
    (c) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
    (d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
    (e) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.
    (f) Si $a > 0$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.
    (g) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ es divisible por 3.
    (h) Todo $n \in \mathbb{N}$ se puede poner como suma de un múltiplo entero de 3 y otro de 7.
    (i) La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es $(n-2)180°$.
    (j) $7^n - 6n - 1$ es múltiplo de 36 para todo $n \geq 1$.

13. Demostrar que la propiedad

    "$n^2 + 5n + 1$ es par"

    es cierta para $n+1$ si la suponemos cierta para n. ¿Para cuántos números naturales es cierta la propiedad?

14. Demostrar que si el conjunto A es numerable y B tiene cardinal finito, entonces $A \times B$ es numerable.

15. Consideremos el conjunto $A = \{0, 1\}$ en el que se definen tres operaciones internas "+","$\oplus$" y "$*$" de la siguiente forma:

$+$	$\oplus$	$*$
$0+0=0$	$0 \oplus 0 = 0$	$0 * 0 = 0$
$0+1=1$	$0 \oplus 1 = 1$	$0 * 1 = 0$
$1+0=1$	$1 \oplus 0 = 1$	$1 * 0 = 0$
$1+1=0$	$1 \oplus 1 = 1$	$1 * 1 = 1$

    ¿Es $(A, +, *)$ un anillo? ¿Y $(A, \oplus, *)$?

16. Consideremos el conjunto $\mathbb{Z}^2$ en el que se definen las siguientes operaciones internas:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

    Estudiar si el conjunto $\mathbb{Z}^2$ con estas operaciones tiene estructura de anillo.