Práctica 0

(Introducción a Maple)

1. Averiguar en que librería se encuentra la función *divisors*.

2. Calcular todos los divisores de 1000.

3. Este ejercicio se centra en la manipulación de números primos y en la utilización del sistema de ayuda de Maple. Se pide:

   3.1. Obtener un número entero de 12 cifras a generado aleatoriamente

   3.2. Decidir, sin factorizar, si a es primo

   3.3. Factorizar a

   3.4. Repetir los ejercicios 3.2 y 3.3 para cincuenta números enteros obtenidos alealtoriamente. ¿Cuántos números primos han sido generados?. Dar una explicación a este fenómeno.

   3.5. Obtener los números primos anterior y posterior al número 123456789.

   3.6. Calcular el milésimo número primo.

4. Factorizar el número $a = 100!$.

5. Calcular el m.c.d. de $2^{30} - 1, 31!, 4^{14} - 1$.

6. Construir una lista con los 100 primeros primos.

7. Obtener las 50 primeras cifras de los números $\frac{\sqrt{e}}{\sqrt[3]{\pi}}$ y $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[15]{\pi}}}$.

8. Calcular el m.c.d. de los coeficientes del polinomio $f(x) = 12x^3 + 120978x^2 + 1249875000x + 12300$.

9. Resolver el problema 8. sin utilizar el comando *igcd*.

10. Factorizar sobre $\mathbb{Q}$ el polinomio $f(x, y, z) = x^{20}y^{20} - z^{10}$

11. Factorizar sobre $\mathbb{C}$ el poliniomio $f(x, y) = x^2 + y^2$.

12. Calcular el m.c.d. sobre $\mathbb{Q}$ de los polinomios $f_1(x,y,z) = x^{30}y^{30} - z^{10}$ y $f_2(x,y,z) = x^{16}y^{15} - x^{15}y^{16} - z^5x + z^5y$.

13. Calcular el m.c.d. sobre $\mathbb{Q}$ de los polinomios $f_1(x) = x^4 - 2x^2 - 9x + 10$, $f_2(x) = x^4 - 3x^3 - 8x^2 - 15x + 25$, $f_3(x) = x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 13x + 20$.

14. Calcular el m.c.d. sobre $\mathbb{Q}$ de los coeficientes del polinomio $f(x,y,z) = 79x^2yt + 56xy^2z + 49x^2y^3 + 63x^2y^2z + 57x^2z^3 - 59y^2z^3$ en la variable z.

15. Factorizar sobre $\mathbb{Q}$ los polinomios de los ejercicios 12 y 13.

16. Obtener el coeficiente de x^{20} en el polinomio $f(x,y,z) = (5x^2y + y^2 + 12xz)^{20}$.

17. Obtener todos los coeficientes del polinomio anterior en las variables $\{x, y\}$.

18. Construir las funciones $f(x,y,z) = \frac{sen(x)cos(y)}{z^2+1}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$. Calcular $f(5,6,7)$ y obtener la composición $g(f(x,y,z))$.

19. Simplificar las siguientes expresiones:

    19.1. $(x+y+z)^3 - 3(x+y)(y+z)(z+x)$

    19.2. $(x-y)^3 + 3(x-y)(x+y) + (x+y)^3 + 3(x-y)(x+y)^2 - 8x^3 + 3(x-y)(x-1-y)(x+y)$

    19.3. $\frac{x^{100}-1}{x-1} + \sum_{i=0}^{99} x^i$

    19.4. $\frac{3}{cos^2 x} - \frac{2}{cos^6 x} + \frac{3sen^2 x}{cos^6 x} - tg^6 x$

    19.5. $\frac{sen^3(x)-1}{sen(x)-1} - sen(x) + cos^2(x)$

    19.6. Sean $f = x^3y^2 + z$, $g = 4x^5y^2 + z^3 + 1$, $h = 2x^3y^4 + 7z^3$. Simplificar $\frac{(f+g)^2+h^3}{f+g+h}$.

    19.7. Sea el polinomio $f(x,y) = y^2 + y^3 + xy^2 + 2x^2 + 5x^2y + 3x^3$ y las funciones racionales $R_1(t) = \frac{2+t^2}{-3+5t-t^2+t^3}$, $R_2(t) = \frac{-t(2+t^2)}{-3+5t-t^2+t^3}$. Simplificar la expresión $f(R_1(t), R_2(t))$.

    19.8. Sea el polinomio $g(x,y,z) = -y + 3x^2yz + y^2 - 3x^2y^2z + x^3z - 2x^3yz + x^3y^2z + x^3y^2z^2$ y las funciones racionales $q_1(t_1,t_2) = \frac{1}{t_1+t_2}$, $q_2(t_1,t_2) = \frac{t_1}{t_1+t_2^2}$, $q_3(t_1,t_2) = t_1t_2$. Simplificar $g(q_1(t_1,t_2), q_2(t_1,t_2), q_3(t_1,t_2))$.

20. Sea $f(x,y,z) = 79x^2yt + 56xy^2z + 49x^2y^3 + 63x^2y^2z + 57x^2z^3 - 59y^2z^3$. Obtener la expresión simplicificada de la función racional $g(t_1,t_2,t_3) = f(\frac{t_1}{5t_2+3}, \frac{t_2}{3t_3+t_1}, t_2 - 2, \frac{t_3+1}{t_2})$. Calcular $g(1/3, 5/7, 2)$.

21. Sea $f(x) = \frac{senx}{x}$. Se pide:

    21.1. Calcular $f'(x)$.

    21.2. Calcular $f^{v)}(x)$:

    21.3. Obtener $f^{100)}(\pi)$.

    21.4. Obtener las 15 primeras cifras del valor obtenido en 21.3.

    21.5. Comprobar mediante integración que el resultado obtenido en 21.2 es correcto.

22. Introducir una matriz 3×6 $A = (a_{i,j})$ donde $a_{i,j} = \frac{i}{i+j}$.

23. Introducir una matriz 6×3 $B = (b_{i,j})$ donde $b_{i,j} = \frac{cos(i+j)}{e^j}$. Obtener una aproximación numérica de la matriz B.

24. Introducir una matriz 4×4 $C = (c_{i,j})$ donde $c_{i,j} = max\{i,j\}$.

25. Introducir una matriz 4×4 $D = (d_{i,j})$ donde $d_{i,j}$ es el $(i+j)$-ésimo número primo.

26. Introducir una matriz 10×10 $I = (\delta_{i,j})$ donde $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ y $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$.

27. Sea $f(x) = sen(\frac{1}{x})$. Introducir la matriz diagonal 7×7 cuyo i-ésimo elemento en la digonal principal es $f^{i)}(1)$. Obtener una aproximación numérica de la matriz.

28. Introducir aleatoriamente una matriz simétrica de orden 5.

29. Calcular $C + D, C \cdot D, 5\,C + \frac{3}{2}\,D, C^{-1}, D^{-5}, C^3$ y $(x^2+1) \cdot C$, donde C y D son las matrices construidas en los ejercicios 24 y 25.

30. Calcular el determinante de las matrices que aparecen en los ejercicios 24,25,26,27,28,29 y el rango de las matrices obtenidas en todos los ejercicios anteriores.

31. Construir una matriz 5×5 sin elementos nulos con determinante 13.

32. Construir una matriz 4×4, sobre $\mathbb{R}[t]$, sin elementos nulos y con determinante
    $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

33. Obtener la fórmula del determinante de una matriz 3×3. Idem para matrices 4×4.

34. Calcular en función de los parámetros a y b el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & 2a & a \\ b & 2b & 2b & 0 & 2b \\ a^2 - b^2 & 2a^2 - 2b^2 & 2a^2 - 2b^2 & 2a^2 - 2b^2 & a^2 - b^2 \\ 2 + a & 2a & 2 + a & 2 + 2a & 2 \\ b & 2b & b & 2b & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular la inversa de A cuando el rango sea máximo.

35. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Determinar la parte real y la parte imaginaria de

$$\frac{1 + a + ib}{1 + a - ib}$$

36. Calcular $h \circ g \circ f$ donde

$$f(x) = \sqrt{x + 1},\ g(x) = x^2 + 3 * x^2 + 1,\ h(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

37. Sea

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Encontrar una relación entre $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ para que f sea invertible.

38. Sea

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + \sqrt{5}}{4x^2 + 3\sqrt{2}x - 0.66}$$

Se pide

38.1. Evaluar $f(x)$ para $x = 1, 10, \ldots, 10^9$

38.2. Representar f gráficamente.

38.3. Calcular el límite de $f(x)$ cuando x tiende a ∞.

39. Dada la sucesión $\{\sqrt{n^2 + n} - n\}_{n \in \mathbb{N}}$, determinar su límite y representar los 150 primeros términos de la sucesión.

40. Determinar la derivada en $a \neq 0$ de la función $f(x) = x + x^2 sen(\frac{1}{x})$

41. Calcular
$$\int \frac{x}{x^3+1}$$
y comprobar el resultado mediante derivación.

42. Determinar la suma
$$\sum_{0}^{\infty} \frac{n^{10}+n+1}{n!}$$

43. Dada la curva plana, en polares, $r = 1+acos(\theta)$, representar su gráfica para $a = 1, 2, 3, 4, \frac{1}{2}$.

44. Representar las curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^2 - x^4 - y^2$.