Departamento de Matemáticas, Universidad de Alcalá

Matemática Discreta (ITST, ITSE, ITT) **Refuerzo curso 2005-2006**

Práctica 4.1
(Espacios vectoriales)

1. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son linealmente independientes en el espacio vectorial V indicado.

   (a) $\{(1,-4,1),(1,2,5),(1,-3,2)\}$ en $V=\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.

   (b) $\{(0,1,0,1),(1,2,0,1),(1,2,3,1),(1,2,3,1),(2,3,3,2))\}$ en $V=\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$.

   (c) $\{(2,4,-1,4),(2,-2,0,1),(-2,3,-2,1),(1,-3,-2,4)\}$ en $V=\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$.

   (d) $\{(3,0,1,-1),(4,-2,1,-2),(2,1,0,1),(3,-2,1,-2)\}$ en $V=\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$.

   (e) $\{1,x,x^2,\dots,x^n,\dots\}$ en $V=\mathbb{R}[x]$ sobre $\mathbb{R}$.

   (f) $\{(1+i,0),(i,1),(1,i)\}$ en $V=\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$.

2. Decidir para qué valores de $a\in\mathbb{R}$ es linealmente independiente el conjunto $\{(1,a,0),(a,a,1),(1,0,a+1)\}\subset\mathbb{R}^3$.

3. Determinar m y n para que los vectores $(1,-1,0,-m),(4,-2,n,-1)$, y $(-3,5,m,-8)$ sean linealmente dependientes.

4. Decidir qué subconjuntos del ejercicio 1 son sistema generador.

5. Extraer una base del sistema generador $\{(1,0,2),(2,1,0),(0,3,5),(4,1,2)\}$ de $V=\mathbb{R}^3$.

6. Escribir como combinación lineal de $\{(1,0,2),(2,1,0),(4,1,2)\}$ cada uno de los siguientes vectores: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.

7. Analizar cuáles de estos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Para los que lo sean, calcular una base y su dimensión.

   (a) $W=\{(r,r+2,0)\mid r\in\mathbb{R}\}$.

   (b) $W=\{(x,y,z)\mid x,y\in\mathbb{R},z\in\mathbb{Z}\}$.

   (c) $W=\{(3z,-z,z)\mid z\in\mathbb{R}\}$.

   (d) $W=\{(x,y,z)\mid x+2y+z=0\}$.

   (e) $W=\{(x,y,z)\mid 2x+y+1=0\}$.

   (f) $W=\{(x,y,z)\mid x-y+z=0 \text{ y } x+y-z=0\}$.

(g) $W = \{(x, y, z) \mid 2xy = 0\}$.
(h) $W = \{(x, y, z) \mid 3xy = 1\}$.

8. Para cada uno de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$, determinar el sistema de ecuaciones homogéneas que lo genera:

   (a) $S = \mathcal{L}(\{(1, 1, 2), (-1, 2, 1)\})$.
   (b) $S = \mathcal{L}(\{(1, 0), (0, 1)\})$.
   (c) $S = \mathcal{L}(\{(2, -3, 4)\})$.
   (d) $S = \mathcal{L}(\{(1, 2, -2), (3, 6, -3)\})$.
   (e) $S = \mathcal{L}(\{(1, 2, 0, 1), (0, 2, 1, -1), (3, 0, 0, 1)\})$.

9. Analizar si $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{grado}(p) \leq n\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}[x]$ sobre $\mathbb{R}$. Calcular una base y su dimensión.

10. Dados los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$S_1 = \{(x, y, z) \mid z = 0\}, S_2 = \{(x, y, z) \mid x - y = 0\},$$
$$S_3 = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0 \text{ y } x - z = 0\},$$

   demostrar que $\mathbb{R}^3 = S_1 + S_2$, $\mathbb{R}^3 = S_1 + S_3$ y $\mathbb{R}^3 = S_2 + S_3$. ¿Cuál de ellos es suma directa?

11. Para los subespacios S_2 y S_3 del ejercicio 10, calcular el subespacio $S_1 \cap S_2$. Dar su expresión de las dos formas posibles:

   (a) Como sistema de ecuaciones homogéneas.
   (b) Como variedad lineal generada por un conjunto de vectores.

12. En el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ se consideran las bases $B_1 = \{(-1, -2), (3, 1)\}$, $B_2 = \{(2, 3), (-1, 2)\}$ y $B_c = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Se pide:

   (a) Hallar la matriz del cambio de base de B_1 a B_c, de B_2 a B_c, de B_1 a B_2 y de B_2 a B_1.
   (b) Calcular las coordenadas en B_1 y B_2 del vector que en B_c es $(2, 3)$.
   (c) Calcular las coordenadas en B_2 del vector que en B_1 es $(2, 3)$.
   (d) Calcular las coordenadas en B_1 del vector que en B_2 es $(2, 3)$.

13. Demostrar que $B_1 = \{(1, 2, 0), (0, 2, -1), (-2, 0, 1)\}$ es base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Calcular las matrices de los cambios de base de B_1 a la base canónica y viceversa.