1. Determinar todos los números complejos soluciones de la ecuación $x^3 + 1 = 0$.

   Solución:$\{x = -1\}, \{x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\}, \{x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\}$

2. Simplificar la siguiente expresión trigonométrica:

$$2 + \cos 2x - \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

   Solución: La expresión es constante. Vale 1 para todos los valores de x.

3. Expresar en forma módulo-argumento los siguientes números complejos:

$$z_1 = 1 - \sqrt{3}i \qquad z_2 = 2 + 2i$$

   Solución: Llamando r_i y θ_i, respectivamente, al módulo y al argumento de z_i,

$$r_1 = 2, \quad \theta_1 = \frac{5\pi}{3} \qquad\qquad r_2 = 2\sqrt{2}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{4}$$

4. Factorizar el polinomio $p(x) = 2x^3 + 6x^2 - 8$.

   Solución: $p(x) = 2\,(x-1)\,(x+2)^2$

5. Determinar todos los números reales que verifican las siguientes desigualdades:

$$\text{a)} \quad (x-2)^2 \geq 1 \qquad\qquad \text{b)} \quad \left|\frac{x}{2+x}\right| < 1$$

   Solución: (a) $\{x \leq 1\} \cup \{3 \leq x\}$ (b) $\{-1 < x\}$

6. ¿Cuántos saludos se cruzan entre un grupo de 10 amigos que se ven después de unas vacaciones?

   Solución: $\binom{10}{2} = 45$.

7. Escribir el desarrollo de $(1 + x)^5$.

   Solución: $(1+x)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

8. Supongamos que n es un número natural. La proposición – n es par si, y sólo si, n^2 es par – ¿es verdadera o falsa? Justifica la respuesta.

Solución: Es verdadera. Si n es par, se puede escribir $n = 2k$, luego $n^2 = 2^2k^2$ es par (múltiplo de dos). Además si n es impar, entonces se puede escribir $n = (2k+1)$, luego $n^2 = 2(2k^2+2k)+1$ también es impar. Hemos probado que los pares tienen cuadrado par y los impares tienen cuadrado impar, de donde se deduce el resultado.

9. Considera la proposición siguiente: si $n > 10$, entonces $n! > 2^{2n}$.

   (a) Identifica la hipótesis y la tesis.

   (b) Utilizando sólo la información de la proposición – si $n > 10$, entonces $n! > 2^{2n}$ –,

      i. si te dicen que un número k verifica $k! > 2^{2k}$, ¿qué puedes decir de k?

      ii. £y si te dicen que $k! < 2^{2k}$?

Solución:

(a) La hipótesis es – si $n > 10$ –; la tesis es – $n! > 2^{2n}$ –.

(b.i) Nada. k puede ser mayor que 10, o no ($k = 9$ también verifica que $k! > 2^{2k}$).

(b.ii) Que $k \leq 10$. (Pues si $k > 10$, tendríamos $k! > 2^{2k}$).

10. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = -a \\ 5x + ay = 1 \end{cases}$$

determinar los valores de a para los cuales el sistema es compatible determinado y encontrar la solución para dichos valores de a.

Solución: El sistema es compatible determinado para $a = 1$, $a = -7$.
Para $a = 1$ la solución es $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{2}{3}$. Para $a = -7$ la solución es $x = 3$, $y = 2$.

11. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-1, -2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(-2, 3)$ y por $(-5, -6)$.

Solución: La recta es $x + 3y + 7 = 0$.

12. Hallar las coordenadas del vértice de la parábola de ecuación $x - 2x - 12y + 25 = 0$.

Solución: El vértice de la parábola es el punto $(x, y) = (1, 2)$

13. Resolver la ecuación: $\sqrt{2x+7} = \sqrt{x} + 2$.

Solución: Las soluciones de la ecuación son $\{x = 1\}, \{x = 9\}$.

14. ¿Sabrías decir, sin usar la calculadora, cuál de los números $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[4]{3}$ es mayor?

Solución: El número $\sqrt[4]{3}$ es más grande que $\sqrt[3]{2}$.

15. Encontrar todas las soluciones de $3\cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$ con $0 \leq x < 2\pi$.

Solución: La ecuación tiene cuatro soluciones, a saber: $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

16. Resolver la ecuación $\log_4 y = -\dfrac{3}{2}$.

Solución: La solución es $y = \frac{1}{8}$.

17. Resolver la ecuación $5^{x+1} + 5^x = 750$.

Solución: La solución es $x = 3$.

18. Escribir la ecuación de la circunferencia con centro en $(3, 4)$ y radio 5.

Solución: La ecuación de la circunferencia es $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

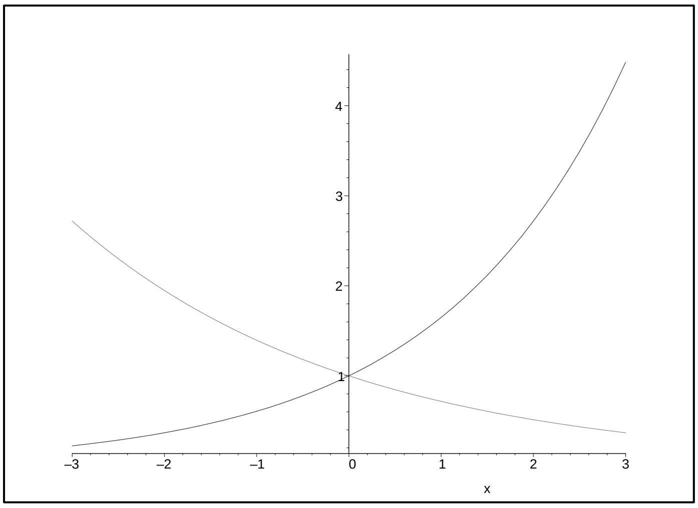
19. Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 23 = 0$ en el punto $(3, -10)$.

Solución: La ecuación de la recta tangente es $x - 3y - 33 = 0$.

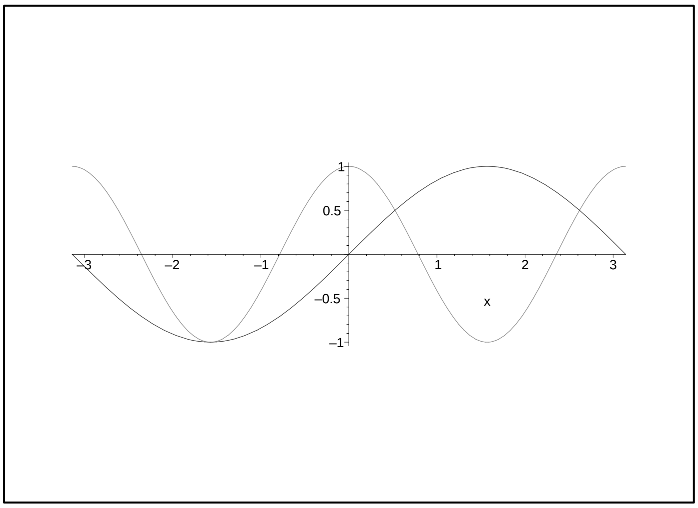
20. Hallar las coordenadas del centro de esta elipse: $x^2 + 4y^2 - 6x + 32y + 69 = 0$

Solución: El centro de la elipse es el punto $(3, -4)$.

21. Representar conjuntamente las gráficas de las funciones $f(x) = e^{3x}$ y $g(x) = e^{-2x}$.



22. Representar conjuntamente en el intervalo $[-\pi, \pi]$ las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos 2x$.



23. Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x}$.

Solución: $\frac{1}{2}$.

24. Sea $f(x) = \operatorname{sen}(\ln(1 + x^2))$. Calcular $f'(x)$.

Solución: $f'(x) = \dfrac{2x \cos(\ln(1 + x^2))}{1 + x^2}$.

25. Calcular $\int xe^{2x}\, dx$.

Solución: $1/2\, xe^{2\,x} - 1/4\, e^{2\,x} + C$.