Práctica 5
(Espacios vectoriales)

1. Estudiar los sistemas de ecuaciones lineales dados por las siguientes matrices ampliadas y resolverlos en su caso.

$$\text{a)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & -2 & -7 \\ 3 & -2 & 1 & 10 \\ -2 & 0 & 4 & 10 \end{array}\right) \qquad \text{b)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 7 & 6 \end{array}\right)$$

   Solución:

2. Dados los polinomios $\{2x^2 + x + 2, x + 1, x^2 + 1\}$ en $\mathbb{Z}_3[x]$:
   (a) Estudiar si son linealmente independientes.
   (b) Estudiar si son sistema generador del conjunto de polinomios de $\mathbb{Z}_3[x]$ con grado ≤ 2.

3. Consideremos las siguientes matrices de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Estudiar si son linealmente independientes.
   (b) Estudiar si son sistema generador de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)$.

4. Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial V de dimensión n. Demostrar que los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ son linealmente independientes si y sólo si la matriz formada por sus coordenadas respecto de cualquier base tiene rango r.

5. Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial V de dimensión n. Demostrar que los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ son un sistema de generadores de V si y sólo si la matriz formada por sus coordenadas respecto de cualquier base tiene rango n.

6. Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Para una matriz $A = (a_{ij})$ definimos $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$. Dados los siguientes subconjuntos de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$S_1 = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\} \qquad S_2 = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 0\}$$

   (a) Decidir si son subespacios vectoriales.
   (b) En caso de serlo, encontrar una base.

7. Consideremos los siguientes subespacios de $(\mathbb{Z}_5)^3$:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_5)^3 \mid x + y + z = 0 \text{ y } x + 4z = 0\} \qquad S_2 = L((1, 1, 0))$$

   (a) Determinar unas ecuaciones paramétricas de S_1 y unas implícitas de S_2.
   (b) Calcular $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$, dando la dimensión de cada uno.

8. Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 3 con coeficientes reales. Consideremos los subespacios

$$S_1 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\} \qquad S_2 = L(1 + x, x + x^3)$$

   (a) Determinar unas ecuaciones paramétricas de S_1 y unas implícitas de S_2.
   (b) Calcular $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$, dando la dimensión de cada uno.