

Práctica 2

(Divisibilidad en \mathbb{Z})

1. Demostrar las siguientes propiedades sobre divisibilidad de números enteros:

$$\text{a) } a|b \text{ y } c|d \Rightarrow ac|bd \qquad \text{b) } a|b \text{ y } a|c \Rightarrow a|(b+c)$$

2. Demostrar las siguientes propiedades del máximo común divisor:

$$\text{a) } \text{mcd}(ca, cb) = |c| \text{mcd}(a, b) \qquad \text{b) } \text{Si } a \text{ es par y } b \text{ es impar, } \text{mcd}(a, b) = \text{mcd}\left(\frac{a}{2}, b\right)$$

3. Calcular:

$$\text{a) } \text{mcd}(238, 196) \qquad \text{b) } \text{mcd}(481, 325) \qquad \text{c) } \text{mcd}(8711, 3206)$$

4. Sean (b, c) , (c, d) y (d, e) tres pares consecutivos del algoritmo de Euclides (por tanto, $b > c > d$). Demostrar que $d < b/2$. Deducir de aquí que el número de divisiones realizadas por el algoritmo es como mucho $2 \log_2 b$. (Indicación: estudiar por separado los casos $c < b/2$ y $c > b/2$).

5. Sean $a > b > c$ enteros positivos, y sea $\text{rem}(a, b)$ el resto de dividir a entre b . Demostrar que $\text{mcd}(a, b, c) = \text{mcd}(c, \text{rem}(a, c), \text{rem}(b, c))$.

6. Calcular

$$\text{a) } \text{mcd}(462, 378, 350) \qquad \text{b) } \text{mcd}(627, 513, 475)$$

7. Supongamos que el máximo común divisor de a y b es un primo p . ¿Cuáles son los posibles valores del máximo común divisor de a^2 y b ? ¿Y del máximo común divisor de a^3 y b ? Si $\text{mcd}(a, b) = p$, ¿cuánto vale $\text{mcd}(a^3, b^3)$?

8. Dados a y b enteros positivos, demostrar que

$$a, b \text{ coprimos} \iff \exists x, y \in \mathbb{Z} \text{ tales que } ax + by = 1.$$

9. Encontrar todas las soluciones enteras de la ecuación diofántica $21x + 14y = 147$. Indicar cuáles de ellas son positivas.

10. Queremos echar 21 litros de gasóleo a un depósito. Para ello, tenemos dos bidones, de 2 y 5 litros respectivamente. Responder a las siguientes cuestiones:

(a) ¿Es posible medir 21 litros con nuestros bidones? ¿Por qué?

(b) En caso afirmativo, dar todas las combinaciones posibles.

(c) Si suponemos que en nuestro depósito caben exactamente 22 litros, ¿cómo podemos echar 21 litros sin desbordar el depósito?

11. Encontrar, si las hay, todas las soluciones enteras de las siguientes ecuaciones diofánticas:

(a) $910x + 3003y = 7$.

(b) $910x + 3003y = 91$.

(c) $910x + 3003y = -364$.

12. Encontrar todas las soluciones enteras de la ecuación diofántica $3x + 6y + 5z = 7$.

(Indicación: Redefiniendo $w := x + 2y$, la ecuación dada equivale a $\text{m.c.d.}(3, 6)w + 5z = 7$. Resolviendo ésta se obtienen los posibles valores de w y z . Los de w igualados a $x + 2y$ nos dan una nueva ecuación. Si la resolvemos, ya tendremos los posibles valores de x , de y y de z).

13. Una máquina autoservicio se ha quedado sin cambio y sólo puede devolver monedas de 1 euro, monedas de 2 euros y billetes de 5 euros. Si tiene que devolver 29 euros,

(a) ¿Puede hacerlo? ¿Por qué?

(b) En caso de ser posible, dar todas las posibles maneras de hacerlo.

14. Dados dos números naturales a y b , escribir el número racional $\frac{1}{\text{m.c.m.}(a,b)}$ como suma de dos racionales con denominadores a y b .

15. Calcular, sin descomponer en potencias de primos:

(a) $\text{m.c.m.}(38, 23)$, (b) $\text{m.c.m.}(90, 42)$, (c) $\text{m.c.m.}(1260, 1176)$.