Álgebra (Ingeniería Informática) **Curso 2005-2006**

Práctica 1
(Preliminares)

1. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Demostrar las siguientes afirmaciones:
   (a) $A \cup B$ es el menor conjunto que contiene a A y B.
   (b) $A \cap B$ es el mayor conjunto contenido en A y B.

2. Dados dos conjuntos A y B, se llama *diferencia simétrica* de ambos, denotada $A \triangle B$, al conjunto
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$
   Demostrar que $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

3. Sean $f : A \to B$ una aplicación y $S \subset A$, $T \subset B$. Demostrar:
   (a) $S \subset f^{-1}(f(S))$, y si f es inyectiva se da la igualdad.
   (b) $f(f^{-1}(T)) \subset T$, y si f es sobreyectiva se da la igualdad.

4. Sean $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ y $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definidas por $f(s) = s - 1$ y $g(s) = s^2$.
   (a) Estudiar si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.
   (b) Describir las aplicaciones $g \circ f$ y $f \circ g$ y comprobar que no son iguales. (Esto demuestra que la composición de aplicaciones no es, en general, conmutativa).

5. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ aplicaciones. Demostrar que:
   (a) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
   (b) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva y g puede no serlo.
   (c) Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
   (d) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva pero f puede no serlo.

6. Dada la siguiente relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
$$(a, b)\ R\ (c, d) \Longleftrightarrow ad = bc,$$
   probar que es una relación de equivalencia. ¿Cuál es el conjunto cociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\})/R$?

7. Sea $f : A \to B$ sobreyectiva (con A no vacío).
   (a) Demostrar que, para $x, y \in A$, la relación
$$x\, R_f\, y \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = f(y)$$
   es una relación de equivalencia en A.
   (b) Dar una biyección entre A/R_f y B.

8. Supongamos definida una relación de orden $\leq$ en un conjunto A. Demostrar que entonces la relación
$$(\alpha_1, \alpha_2) \leq (\beta_1, \beta_2) \Longleftrightarrow \alpha_1 \leq \beta_1 \text{ y } \alpha_2 \leq \beta_2$$
es una relación de orden en A^2.
Si $\leq$ es un orden total en A, ¿lo es también éste en A^2?

9. Demostrar, utilizando el principio de inducción, que si $|A| = n$ entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

10. Demostrar, usando el principio de inducción:
    (a) $1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$.
    (b) $1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + (n-1)(n-1)! = n!$.
    (c) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
    (d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
    (e) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.
    (f) Si $a > 0$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.
    (g) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ es divisible por 3.
    (h) Todo $n \in \mathbb{N}$ se puede poner como suma de un múltiplo entero de 3 y otro de 7.
    (i) La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es $(n-2)180°$.
    (j) $7^n - 6n - 1$ es múltiplo de 36 para todo $n \geq 1$.

11. Demostrar que la propiedad
$$\text{“}n^2 + 5n + 1 \text{ es par”}$$
es cierta para $n+1$ si la suponemos cierta para n. ¿Para cuántos números naturales es cierta la propiedad?

12. Demostrar que si el conjunto A es numerable y B tiene cardinal finito, entonces $A \times B$ es numerable.

13. Consideremos el conjunto $A = \{0, 1\}$ en el que se definen tres operaciones internas “$+$”,“$\oplus$” y “$*$” de la siguiente forma:

$+$	$\oplus$	$*$
$0+0=0$	$0 \oplus 0 = 0$	$0*0=0$
$0+1=1$	$0 \oplus 1 = 1$	$0*1=0$
$1+0=0$	$1 \oplus 0 = 1$	$1*0=0$
$1+1=0$	$1 \oplus 1 = 1$	$1*1=1$

¿Es $(A, +, *)$ un anillo? ¿Y $(A, \oplus, *)$?

14. Consideremos el conjunto $\mathbb{N}^2$ en el que se definen las siguientes operaciones internas:
$$(a,b) + (c,d) = (a,b) + (c,d)$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$
Estudiar si el conjunto $\mathbb{N}^2$ con estas operaciones tiene estructura de anillo.