Departamento de Matemáticas, Universidad de Alcalá

Matemática Discreta (ITST, ITSE, ITT) **Refuerzo curso 2004-2005**

Práctica 5
(Diagonalización)

1. Demostrar que para cualquier endomorfismo f se cumple:

$$f \text{ inyectivo } \iff \lambda = 0 \text{ no es autovalor.}$$

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$:

   (a) Calcular sus autovalores.

   (b) Para cada autovalor, calcular su orden (o multiplicidad algebraica).

   (c) Para cada autovalor λ, calcular su subespacio propio $L(\lambda)$.

   (d) Para cada autovalor, calcular su multiplicidad geométrica.

   (e) Decidir si A (o, equivalentemente, el endomorfismo f definido por la matriz A) es diagonalizable.

   (f) Si se puede, expresarla como $A = PDP^{-1}$ con D diagonal.

   (g) Usar, cuando sea posible, el apartado anterior para calcular A^n.

3. Hacer lo mismo para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Hacer lo mismo para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Hacer lo mismo para la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Hacer lo mismo para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ endomorfismo dado por $f(x, y, z) = (-y, y, -x + az)$:

   (a) Determinar los valores de a para los que f es diagonalizable.

   (b) Para esos valores de a, calcular A^n (para cualquier $n \in \mathbb{N}$).

(c) Calcular también A^n para el resto de valores de a.

8. Calcular, en función de a, los autovalores de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

¿Para qué valores de a es esta matriz diagonalizable?

9. Dada la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$:

(a) Calcular sus autovalores. Comprobar que son reales.

(b) Para cada autovalor λ, calcular su subespacio propio $L(\lambda)$. Comprobar que cada dos autovectores v_1, v_2 asociados a autovalores distintos λ_1, λ_2 son *ortogonales*, es decir; $v_1^t \cdot v_2 = 0$.

(c) Expresarla como $A = PDP^{-1}$ para D una matriz diagonal.

(d) Comprobar que P^tAP es otra matriz diagonal $\bar{D}$ (es decir, que $A = P\bar{D}P^t$).

(e) Encontrar una matriz Q ortogonal y tal que Q^tAQ sea diagonal. (Pista: hace falta que los vectores sean *ortonormales*, es decir, ortogonales y de norma $||v|| = 1$. Así, Q se obtiene dividiendo cada columna c de P por su norma $||c|| = +\sqrt{c_1^2 + \cdots + c_n^2}$).

10. Hacer lo mismo para $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

11. Hacer los tres primeros apartados para $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Comprobar que ahora P^tAP no es diagonal y razonar por qué.