

Práctica 4.2
(Aplicaciones lineales)

NOTA: Justificar todas las respuestas.

1. Demostrar que, si $f : V \rightarrow V'$ es una aplicación lineal, entonces su núcleo $\text{Ker}(f)$ es un subespacio vectorial de V .
2. Estudiar si las siguientes aplicaciones son lineales:
 - (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.
 - (b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x + y$.
 - (c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x + y, xy)$.
 - (d) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (x + y, x - 3y, y + 2)$.
 - (e) $\det : \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ para $n > 1$.
3. Para la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x + y, x + z)$:
 - (a) Determinar la matriz de f respecto de las bases $B = \{(1, 0, 2), (2, 1, 0), (1, 3, 5)\}$ y $B' = \{(1, 0), (1, 1)\}$.
 - (b) Calcular $\text{Ker}(f)$ obteniendo una base.
 - (c) Dar también la expresión de $\text{Ker}(f)$ en ecuaciones implícitas (sistema homogéneo que lo genera).
 - (d) Calcular $\text{Im}(f)$ obteniendo una base.
4. Para la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (x - y, x + 2y, 2x - y)$:
 - (a) Determinar la matriz de f respecto de las bases $B = \{(1, 2), (-1, 1)\}$ y $B' = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
 - (b) Calcular $\text{Ker}(f)$ obteniendo una base.
 - (c) Calcular $\text{Im}(f)$ obteniendo una base.
 - (d) Dar también la expresión de $\text{Im}(f)$ en ecuaciones implícitas (sistema homogéneo que lo genera).
5. Para $f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a + d, b + c)$$

- (a) Demostrar que f es una aplicación lineal.
- (b) Determinar la matriz de f respecto de las bases canónicas $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$.
- (c) Calcular $\text{Ker}(f)$ obteniendo una base.
- (d) Calcular $\text{Im}(f)$ obteniendo una base.
6. Sea $f : V_3 \rightarrow V'_4$ una aplicación lineal entre los \mathbb{R} -espacios vectoriales V_3 y V'_4 , de dimensiones 3 y 4 respectivamente, dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinar los valores de a para los que f es inyectiva. Para el resto, calcular $\text{Ker}(f)$ obteniendo una base.
- (b) Determinar los valores de a para los que f es sobreyectiva. Para el resto, calcular $\text{Im}(f)$ obteniendo una base.
7. Para la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (x + az, -x + 2y + az, 3x + ay + 4z)$:
- (a) Determinar los valores de a para los que f es inyectiva. Para el resto, calcular $\text{Ker}(f)$ obteniendo una base.
- (b) Determinar los valores de a para los que f es sobreyectiva. Para el resto, calcular $\text{Im}(f)$ obteniendo una base.
8. Para el automorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $f(x, y) = (x + y, x - y)$:
- (a) Determinar la matriz de f respecto de la base $B = \{(1, -3), (-1, 4)\}$.
- (b) Determinar la matriz del automorfismo inverso f^{-1} (respecto de esa misma base).
9. Determinar la matriz en la base $B_2 = \{(2, 3), (-1, 4)\}$ del endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base $B_1 = \{(-1, 2), (3, 1)\}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. (Pista: Usar el ejercicio 12.a) de la práctica 4.1)