Práctica 4.1
(Espacios vectoriales)

1. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son linealmente independientes en el espacio vectorial V indicado.
 - (a) $\{(1, -1, 4), (1, 1, 5), (1, -5, 2)\}$ en $V = \mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.
 - (b) $\{(2, 4, -4, 4), (2, -1, 0, 1), (-2, 3, -2, 2), (1, -1, -2, 4)\}$ en $V = \mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$.
 - (c) $\{(3, 0, 2, -1), (4, -1, 1, -4), (2, 1, 1, 0), (3, -2, 3, -2)\}$ en $V = \mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$.
 - (d) $\{(1, 0, 0, 0), (1, 2, 0, 0), (1, 2, 3, 0), (1, 2, 3, 4), (2, 2, 2, 2)\}$ en $V = \mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$.
 - (e) $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ en $V = \mathbb{R}[x]$ sobre $\mathbb{R}$.
 - (f) $\{(1 + i, 0), (i, 1), (1, i)\}$ en $V = \mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$.
2. Decidir para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es linealmente independiente el conjunto $\{(1, a, 0), (a, a, 1), (0, 0, a + 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.
3. Determinar m y n para que los vectores $(1, -1, 0, -m)$, $(4, -2, n, -1)$, y $(-3, 5, m, -8)$ sean linealmente dependientes.
4. Decidir qué subconjuntos del ejercicio 1 son sistema generador.
5. Extraer una base del sistema generador $\{(1, 0, 2), (2, 1, 0), (0, 3, 5), (3, 4, 7)\}$ de $V = \mathbb{R}^3$.
6. Escribir como combinación lineal de $\{(1, 0, 2), (2, 1, 0), (0, 3, 5)\}$ cada uno de los siguientes vectores: $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.
7. Analizar cuáles de estos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Para los que lo sean, calcular una base y su dimensión.
 - (a) $W = \{(r, r + 2, 0) \mid r \in \mathbb{R}\}$.
 - (b) $W = \{(x, y, z) \mid x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}\}$.
 - (c) $W = \{(3z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.
 - (d) $W = \{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 0\}$.
 - (e) $W = \{(x, y, z) \mid 2x - 5y + 1 = 0\}$.
 - (f) $W = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0 \text{ y } x + y - z = 0\}$.

- (g) $W = \{(x, y, z) \mid xy = 0\}$.
 (h) $W = \{(x, y, z) \mid xy = 1\}$.
8. Para cada uno de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$, determinar el sistema de ecuaciones homogéneas que lo genera:
- (a) $S = \mathcal{L}(\{(1, 3, 2), (-1, 2, 1)\})$.
 (b) $S = \mathcal{L}(\{(1, 0), (0, 1)\})$.
 (c) $S = \mathcal{L}(\{(2, -3, 4)\})$.
 (d) $S = \mathcal{L}(\{(1, 2, -1), (3, 6, -3)\})$.
 (e) $S = \mathcal{L}(\{(1, 2, 2, 1), (0, 2, 1, -1), (3, 0, 0, 1)\})$.

9. Analizar si $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{grado}(p) \leq n\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}[x]$ sobre $\mathbb{R}$. Calcular una base y su dimensión.

10. Dados los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$S_1 = \{(x, y, z) \mid z = 0\}, S_2 = \{(x, y, z) \mid x - y = 0\},$$

$$S_3 = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0 \text{ y } x - z = 0\},$$

demostrar que $\mathbb{R}^3 = S_1 + S_2$, $\mathbb{R}^3 = S_1 + S_3$ y $\mathbb{R}^3 = S_2 + S_3$. ¿Cuál de ellos es suma directa?

11. Para los subespacios S_2 y S_3 del ejercicio 10, calcular el subespacio $S_2 \cap S_3$. Dar su expresión de las dos formas posibles:

- (a) Como sistema de ecuaciones homogéneas.
 (b) Como variedad lineal generada por un conjunto de vectores.

12. En el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ se consideran las bases $B_1 = \{(-1, 2), (3, 1)\}$, $B_2 = \{(2, 3), (-1, 4)\}$ y $B_c = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Se pide:

- (a) Hallar la matriz del cambio de base de B_1 a B_c , de B_2 a B_c , de B_1 a B_2 y de B_2 a B_1 .
 (b) Calcular las coordenadas en B_1 y B_2 del vector que en B_c es $(2, 3)$.
 (c) Calcular las coordenadas en B_2 del vector que en B_1 es $(2, 3)$.
 (d) Calcular las coordenadas en B_1 del vector que en B_2 es $(2, 3)$.

13. Demostrar que $B_1 = \{(1, 2, 0), (0, 2, -1), (-2, 0, 1)\}$ es base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Calcular las matrices de los cambios de base de B_1 a la base canónica y viceversa.