

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

24 de Junio de 2005

NOTA: Justificar todas las respuestas.

1. Dada la función booleana
- $f(w, x, y, z) = \sum m(2, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 13)$
- :

- (a) Simplificar
- f
- por Karnaugh utilizando

	yz	00	10	11	01
wx					
00					
01					
11					
10					

- (b) Escribir f como producto de maxterms y obtener su notación $f = \prod M$.
2. Dado el grafo G con $V = \{1, \dots, 6\}$ y aristas de forma que “cada vértice impar está unido exactamente a los vértices pares, y viceversa”:
- (a) Dibujar una representación de G en $\mathbb{R}^2$. Decidir si se puede dibujar sin cruces y razonar por qué.
- (b) Si todas las aristas incidentes al vértice 1 tienen peso 1, todas las incidentes al 3 tienen peso 3 y todas las incidentes al 5 tienen peso 5, obtener un camino de peso mínimo entre el vértice 3 y el vértice 5, utilizando el algoritmo de Dijkstra.
3. Para los subespacios $U = \{(w, x, y, z) \mid x + z = 0, w - x + z = 0\}$ y $V = \mathcal{L}\{(1, 1, 0, 1), (1, 2, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^4$:
- (a) Hallar una base de U (paramétricas).
- (b) Determinar las ecuaciones homogéneas que generan V (implícitas).
4. Para $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x - 2y, x + y)$:
- (a) Determinar su matriz respecto de las bases $B = \{(2, 1), (2, 7)\}$ y $B' = \{(-1, 1), (1, 2)\}$.
- (b) Utilizando esta matriz, calcular $\text{Im}(f)$ y $\text{Ker}(f)$.
5. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ endomorfismo dado por $f(x, y, z) = (-y, y, -x + az)$:
- (a) Determinar los valores de a para los que f es diagonalizable.
- (b) Para esos valores de a , calcular A^n (para cualquier $n \in \mathbb{N}$).
- (c) Calcular también A^n para el resto de valores de a .

Ejercicio	1.	2.	3.	4.	5.(a)	5.(b)	5.(c)
Puntuación	2	2	2	2	1	0,5	0,5

El ejercicio con menor nota se podrá sustituir por las prácticas.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

24 de Junio de 2005

SOLUCIONES

1. (a) Haciendo los grupos en

yz	00	10	11	01
wx				
00	0	1	0	0
01	1	1	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	1	0

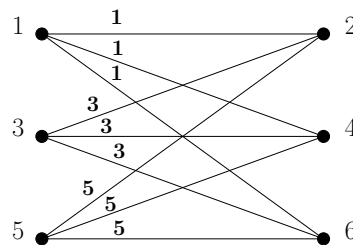
se obtiene $f(w, x, y, z) = \bar{w}y\bar{z} + x\bar{y} + w\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}yz$.

- (b) Si $f(w, x, y, z) = \sum m(2, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 13)$, éstas son precisamente las combinaciones para las que f vale 1. Por lo tanto, valdrá 0 para el resto de combinaciones; 0, 1, 3, 7, 9, 10, 14, 15.

Así, el producto de maxterms es $f(w, x, y, z) = (w+x+y+z)(w+x+y+\bar{z})(w+x+\bar{y}+\bar{z})(w+\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})(\bar{w}+x+y+\bar{z})(\bar{w}+x+\bar{y}+z)(\bar{w}+\bar{x}+\bar{y}+z)(\bar{w}+\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$.

Finalmente, para escribir la f.n.c. necesitamos los complementarios ($2^4 - 1$ - números) de las combinaciones para las que f vale 0, lo que nos da $f(w, x, y, z) = \prod M(0, 1, 5, 6, 8, 12, 14, 15)$.

2. El grafo que se define en el enunciado es



- (a) Es $K_{3,3}$ y no puede dibujarse sin cruces (Teorema Kuratowski).
 (b) Con el algoritmo de Dijkstra se obtiene:

Iteración	Pivote	1	2	3	4	5	6
0		∞	∞	$\bar{0}$	∞	∞	∞
1	3	∞	$\bar{3}$	$\bar{0}$	3	∞	3
2	2	4	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	8	3
3	4	4	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	8	$\bar{3}$
4	6	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	8	$\bar{3}$
5	1	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$

y por tanto el camino de peso mínimo tendrá peso 8. Para encontrarlo, partimos del vértice 5 y encontramos que los vértices 2, 4, 6 cumplen que su etiqueta más el coste de la arista al 5 suma 8. Escogiendo cualquiera de ellos, por ejemplo el 6, repetimos y obtenemos el vértice 3. Así, $3 \rightarrow 6 \rightarrow 5$ es un camino de peso mínimo (también lo son $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ y $3 \rightarrow 2 \rightarrow 5$).

3. (a) Paso de implícitas a paramétricas:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} x + z = 0 \\ w - x + z = 0 \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} x = -z \\ w - x + z = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x = -z \\ w + z + z = 0 \end{array} \right\} = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} x = -z \\ w = -2z \end{array} \right\} = \left\{ \left(\begin{array}{c} -2z \\ -z \\ y \\ z \end{array} \right) \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} = \\
 &= \left\{ y \cdot \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) + z \cdot \left(\begin{array}{c} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right\} = \mathcal{L} \left\{ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Nota: y puede tomar cualquier valor, no necesariamente $y = 0$.

- (b) Paso de paramétricas a implícitas: Queremos conseguir

$$\text{rango} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & w \\ 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix} \right) \stackrel{!}{=} \text{rango} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2$$

Y como

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & w \\ 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix} \right) \sim \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & w \\ 0 & 1 & x - w \\ 0 & 0 & y \\ 0 & -1 & z - w \end{pmatrix} \right) \sim \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & w \\ 0 & 1 & x - w \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z - 2w + x \end{pmatrix} \right)$$

para tener rango 2 tienen que cumplirse las ecuaciones

$$\begin{cases} y = 0 \\ -2w + x + z = 0 \end{cases}$$

4. (a) La matriz tiene por columnas las coordenadas de $f(2, 1)$ y $f(2, 7)$ en la base $B' = \{(-1, 1), (1, 2)\}$:

$$\triangleright f \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\triangleright f \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \end{pmatrix} = 11 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz es

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (b) $\text{rango}(A_f) = 2 \Rightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Im}(f) = \mathbb{R}^2 \\ \dim(\text{Ker}(f)) = n - \dim(\text{Im}(f)) = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{cases}$$

5. La matriz de f es $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$. Así:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & a - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (a - \lambda)(-\lambda)(1 - \lambda) \end{aligned}$$

Por tanto, los autovalores son $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = a$.

Calculamos los subespacios propios:

$$\triangleright L(0) = \{\text{Soluciones de } (A - 0 \cdot I)X = 0\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{matrix} x = az \\ y = 0 \\ z \text{ cualq.} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} az \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\triangleright L(1) = \{\text{Soluciones de } (A - 1 \cdot I)X = 0\} = \dots = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} a-1 \\ 1-a \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\triangleright L(a) = \{\text{Soluciones de } (A - a \cdot I)X = 0\} = \dots = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Así, las multiplicidades geométricas son $mg_1 = 1, mg_2 = 1, mg_3 = 1$.

Para que f sea diagonalizable, deben cumplirse dos condiciones:

- (i) *El número total de autovalores, contando multiplicidades, es 3.*

Esto se cumple sea cual sea el valor de a .

- (ii) *Para cada autovalor, la multiplicidad geométrica coincide con la algebraica.*

Si $a = 0$ no se cumple, porque entonces $ma_1 = 2 \neq 1 = mg_1$.

Si $a = 1$ no se cumple, porque entonces $ma_2 = 2 \neq 1 = mg_2$.

Para cualquier otro valor de a sí se cumple.

Por tanto f es diagonalizable para cualquier a excepto 0 y 1.

- (b) Puesto que f es diagonalizable, se tiene $A = PDP^{-1}$ y por tanto $A^n = PD^nP^{-1}$, para

$$P = \begin{pmatrix} a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a-1} & 0 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a(a-1)} & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$(c) \text{ Si } a = 0; A^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{cases} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{si } n = 1. \\ = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

$$\text{Si } a = 1; A^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & n-1 & 1 \end{pmatrix}$$