Práctica 5

9.- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

a) AUTOVALORES: $|A-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 9\lambda^2 + 18\lambda = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda \cdot (\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot (\lambda - 3) \cdot (\lambda - 6) = 0$

PISTA ÚTIL:

El polinomio característico tiene la forma

$\lambda^n - \underbrace{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \cdot \underbrace{(\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n)}$,

así que su término independiente es el producto de los autovalores (contando multiplicidades).

↳ Los autovalores son $\boxed{\begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 6 \end{matrix}}$

(Se comprueba que son reales).

¡¡Esto nos da una pista para buscar autovalores; mirar divisores del término independiente!!

b) ▷ $\boxed{L(0)} = \ldots = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \ldots = \boxed{\mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\right)}$.

▷ $\boxed{L(3)} = \ldots = \boxed{\mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}\right)}$.

▷ $\boxed{L(6)} = \ldots = \boxed{\mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}\right)}$.

Comprobamos que, para cualesquiera $v_1 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in L(0)$, $v_2 = \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \in L(3)$, $v_3 = \gamma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in L(6)$, se cumple que:

* v_1 y v_2 son ortogonales; $v_1^t \cdot v_2 = \alpha \cdot (-2\ 2\ 1) \cdot \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \beta \cdot \underbrace{(-2\ 2\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}_{0} = 0$.
* v_1 y v_3 son ortogonales; $v_1^t \cdot v_3 = \ldots = \alpha \cdot \gamma \cdot (-2\ 2\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$.
* v_2 y v_3 son ortogonales; $v_2^t \cdot v_3 = \ldots = \beta \cdot \gamma \cdot (1\ 2\ -2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$.

david.orden@uah.es // www2.uah.es/ordend

c) Como la matriz $\underline{A}$ es simétrica, sabemos que todos sus autovalores son reales y que además es diagonalizable.

Construimos $\boxed{P=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}}$ y resulta $P^{-1}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$,

que cumplen $\underline{A=PDP^{-1}}$ con $D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$.

d) $$\underline{P^tAP}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}=\ldots=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 27 & 0\\ 0 & 0 & 54\end{pmatrix}=\underline{\bar{D}}.$$

* Observar que $\underline{\bar{D}=9\cdot D}$ y que $\underline{P^{-1}=\frac{1}{9}\cdot P}$.

e) Tomando $Q=\begin{pmatrix}-2/3 & 1/3 & 2/3\\ 2/3 & 2/3 & 1/3\\ 1/3 & -2/3 & 2/3\end{pmatrix}$ se tiene que:

$$\left\|\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\right\|=+\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}=+\sqrt{9}=3 \qquad \left\|\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\right\|=3. \qquad \left\|\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\|=3.$$

¡¡ !! Cada columna dividida por $\underline{\text{su}}$ norma. Aquí coincide que todas tienen la misma.

▷ $$\boxed{Q^tAQ}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 27 & 0\\ 0 & 0 & 54\end{pmatrix}=$$
$$\boxed{=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}=D}$$

▷ $\boxed{Q \text{ es ortogonal}} \Leftrightarrow Q^{-1}=Q^t \Leftrightarrow Q\cdot Q^t=I$

Sí, $$\boxed{Q\cdot Q^t}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

david.orden@uah.es // www2.uah.es/ordend