Práctica 5

2.- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$

a) AUTOVALORES: $|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 13-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)\cdot(13-\lambda) - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 26 - 13\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 15\lambda + 14 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{15 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{15 \pm 13}{2} = \begin{cases} 14. \\ 1. \end{cases}$

↳ Los autovalores son $\boxed{\underline{\lambda_1 = 1},\ \underline{\lambda_2 = 14}.}$

b) $\boxed{\text{La multiplicidad algebraica de cada uno de ellos es } \underline{1}}$, pues aparecen como raíz una única vez.

c) ▷ $\boxed{L(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 13 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]}_{(A-\lambda I)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{0}} \right\} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = -3y \right\} =$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 12 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$= \left\{ \begin{pmatrix} -3y \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\} = \boxed{\mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)}$

▷ $\boxed{L(14)} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 14 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} = \ldots = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} -12 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$

$\left(\begin{array}{cc|c} -12 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 0 \\ -12 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = 4x \right\} = \ldots = \boxed{\mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}\right)}$

d) ▷ $\underline{L(1) = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)}$ tiene dimensión $\underline{1}$ (la base tiene $\underline{1}$ elemento).
Por tanto, la multiplicidad geométrica de $\underline{\lambda_1 = 1}$ es $\underline{1}$.

▷ Análogamente, la multiplicidad geométrica de $\underline{\lambda_2 = 14}$ es $\underline{1}$.

e) Sabemos que $\underline{A}$ (o su endomorfismo f asociado) cumple:

$\underline{A}$ diagonalizable $\Longleftrightarrow$
1) El número total de autovalores, contando su multiplicidad algebraica, es $\underline{n}$.
y
2) Para cada uno de ellos, la multiplicidad algebraica coincide con la geométrica.

Aquí se cumple (2 autovalores y para ellos las multiplicidades coinciden) luego $\boxed{\underline{A} \text{ es diagonalizable}}$.

david.orden@uah.es // www2.uah.es/ordend

*OBSERVACIÓN: Podríamos usar antes, como test, que
"Si A admite n autovalores reales y distintos,
entonces A es diagonalizable".
$\Rightarrow$
(¡Ojo! Esto es una condición suficiente, pero puede que A no la cumpla
y aun así sea diagonalizable).

f) Para construir P tal que $A = PDP^{-1}$, tomamos como
columnas las coordenadas de los vectores de una
base de autovectores:

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Así } A = PDP^{-1} \text{ con } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix},} \text{ ¡¡COMPROBARLO!!}$$

Base de $L(1)$. Base de $L(14)$.

En el mismo orden que los vectores.

(Se obtiene que $P^{-1} = \frac{1}{-13} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$).

g) Como $A = PDP^{-1}$, se tendrá $\boxed{A^n} = (PDP^{-1})^n =$

$$= (PD\cancel{P^{-1}}) \cdot (\cancel{P}D\cancel{P^{-1}}) \cdot \overset{n}{\cdots} \cdot (\cancel{P}DP^{-1}) = PD^nP^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 14^n \end{pmatrix} P^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 14^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-13} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-13} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \cdot 1^n & (-1) \cdot 1^n \\ (-1) \cdot 14^n & (-3) \cdot 14^n \end{pmatrix} =$$

$$\boxed{= \frac{1}{-13} \cdot \begin{pmatrix} (-12) \cdot 1^n + (-1) \cdot 14^n & 3 \cdot 1^n + (-3) 14^n \\ 4 \cdot 1^n + (-4) \cdot 14^n & (-1) \cdot 1^n + (-12) \cdot 14^n \end{pmatrix}}$$

david.orden@uah.es // www2.uah.es/ordend