Hoja de Problemas Tema 3

(Sucesiones y series)

Sucesiones de números reales

$\boxed{1.}$ Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

(a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente $\Rightarrow \{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente.

(b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergente $\Rightarrow \{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergente.

(c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergente, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergente $\Rightarrow \{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergente.

(d) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente $\Rightarrow \{a_n\, b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente.

(e) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergente $\Rightarrow \{a_n\, b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergente.

(f) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergente, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergente $\Rightarrow \{a_n\, b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergente.

$\boxed{2.}$ Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Demostrar que:

(a) Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite $\ell > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > 0$ para todo $n \geq n_0$.

(b) Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < \ell$ para todo $n \geq n_0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \ell$.

3. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

(a) Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

(c) Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \ell$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$.

(d) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, entonces $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\ell|$.

4. Demostrar, aplicando la definición de límite, que:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n}{n^2+1} = 3$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2+4} = 0$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 3^{2n-1} = +\infty$ d) $\{(1+\frac{1}{n}) + (-1)^n(1-\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente

$\boxed{5.}$ ¿Pueden existir dos sucesiones de números reales con infinitos términos iguales y distinto límite?

6. ¿Pueden existir dos sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tales que $a_n \neq b_n \forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$?

7. Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales positivos.

   a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ probar que: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

   b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ probar que: $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ acotada $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

   c) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ probar que: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

   d) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ probar que: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ acotada $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

   e) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ probar que: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

8. Determinar los puntos de aglomeración de las sucesiones:

   $\boxed{1.}$ $a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{n+1}{n} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

   2. $b_n = (1 + \dfrac{1}{n}) \operatorname{sen}(\dfrac{n\pi}{2})$

   $\boxed{3.}$ $c_n = \{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{4}, \ldots\}$

   4. $d_n = \dfrac{(1 + (-1)^n)\, n \cos(\frac{n\pi}{2} + 1)}{n+2}$

9. Demostrar que si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que las subsucesiones $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a un mismo límite ℓ, entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ. Dar un ejemplo de una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que las subsucesiones $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converjan y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea divergente.

$\boxed{10.}$ Estudiar si las siguientes sucesiones son de Cauchy:

$$a_n = \sum_{k=1}^{k=n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) \cos(ak), \quad a \in \mathbb{R}, \qquad b_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}, \qquad c_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2+k}$$

11. Demostrar que las sucesiones

$$a_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} \qquad \text{y} \qquad b_n = \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{k}$$

son convergentes y tienen el mismo límite.

12. Estudiar si las siguientes sucesiones son convergentes y, cuando así sea, determinar su límite:

   (1) $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, $a_1 = 5$. (2) $a_{n+1} = \dfrac{1}{2 + a_n}$, $a_1 = 0$

   (3) $a_1 = \sqrt{2}\,, \quad a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\,, \quad a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \quad \ldots$

13. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = a$. Demostrar que si $|a| < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

14. Encontrar a y b tales que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+a}{n+1}\right)^{3n+a}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{b\,n}$$

15. Calcular el límite de las siguientes sucesiones:

(1) $a_n=\sqrt[n]{a}\quad a>0$

(2) $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

(3) $a_n=\dfrac{\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b}}{\sqrt{n+c}-\sqrt{n+d}}\quad c\neq d$

(4) $a_n=\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

(5) $a_n=\left(1-\frac{5}{n^2}\right)^{n^2}$

(6) $a_n=\sqrt[n]{a^n+b^n}\quad a>0,b>0$

(7) $a_n=a^n\dfrac{n!}{n^n}\quad 0<a<e$

(8) $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{tg}(\frac{1}{n^2+k})$

Series de números reales

16. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ convergente, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ convergente $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ convergente.

$\boxed{\text{(b)}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ convergente, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ divergente $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ divergente.

$\boxed{\text{(c)}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ divergente, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ divergente $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ divergente.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ convergente, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ convergente $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,b_n)$ convergente.

$\boxed{\text{(e)}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ convergente, $a_n\geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ convergente $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,b_n)$ convergente.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ divergente, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ convergente $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,b_n)$ divergente.

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ divergente, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ divergente $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,b_n)$ divergente.

(h) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ acotada, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ convergente, $b_n\geq 0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,b_n)$ convergente.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ convergente, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ convergente $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,b_n)$ convergente.

$\boxed{17.}$ Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

(a) Si la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y la serie $\sum_{n\geq 1}b_n$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n\geq 1}(a_nb_n)$ es convergente.

(b) Si la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y la serie $\sum_{n\geq 1}b_n$ es absolutamente convergente, entonces la serie $\sum_{n\geq 1}(a_nb_n)$ es absolutamente convergente.

$\boxed{18.}$ Hallar el término general y el carácter de una serie cuya suma parcial n-ésima es

$$S_n=\frac{2n}{n+1}\quad n\in\mathbb{N}$$

19. Estudiar si son convergentes las siguientes series y en caso afirmativo calcular su suma:

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad (2)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} \qquad \boxed{(3)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$$

$$\boxed{(4)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(n+2)(n+6)} \qquad (5)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \qquad \boxed{(6)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$$

$\boxed{20.}$ Estudiar si las siguientes sucesiones son de Cauchy:

$$a_n = \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\cos(ak), \quad a\in\mathbb{R}, \qquad b_n = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}, \qquad c_n = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{n}{n^2+k}$$

$\boxed{21.}$ Demostrar que las siguientes sucesiones son de Cauchy:

$$(1)\quad a_n = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \qquad (2)\quad a_n = \sum_{k=1}^{n}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^2+k}\right)$$

22. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x\in(n-\frac{1}{n^2}, n+\frac{1}{n^2}) \text{ para algún } n\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostrar que no existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y que, sin embargo, la integral $\int_0^{+\infty} f$ es convergente.

$\boxed{23.}$ Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Encontrar una condición necesaria y suficiente para que la serie de término general

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+2}-a_n)$$

sea convergente. Como aplicación, calcular la suma de

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$$

24. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}$$

con $k\in\mathbb{N}$, justificando la existencia del primer miembro.

25. Conocida la relación de la suma de los n primeros términos de la serie armónica

$$\mathcal{A}_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = \ln n + c + \epsilon_n$$

con $c = 0,577215\cdots$ *constante de Euler-Mascheroni* y $\lim_n \epsilon_n = 0$ se pide:

(a) Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} = \ln 2$$

(b) Calcular el número de términos que hay que sumar en la serie para obtener $\ln 2$ con un error menor que $0,001$.

(c) Como aplicación del apartado a) calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n)(2n+1)}$$

$\boxed{26.}$ Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes de términos positivos y no nulos. Estudiar el carácter de las series

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{a_n + b_n}$

27. Estudiar, según los valores de $a > 0$, el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^a}$$

Obtener para $a = 3$ el valor de su suma con un error menor que $0,008$.

28. Estudiar el carácter de las siguientes series:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{n^2+1}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-2n+3}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)^2}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n}$ (5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)n!}$ (6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n^2+1}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ (8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$ (9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)^2}$

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!-n!}{4^n}$ (11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^n n!} \quad a > 0$ $\boxed{(12)}$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

$\boxed{(13)}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$ $\boxed{(14)}$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (\frac{n+1}{n} + \frac{2n}{n-1})^{-n}$ (15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$

(16) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{(\ln n) n^3}$ (17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{n^2}$ (18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \operatorname{sen}^{2n} \alpha}{n^2} \quad 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

$\boxed{(19)}$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a \ln^b n}$ $\boxed{(20)}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right) \frac{(-1)^n}{n}$ (21) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$

29. Consideremos la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \qquad \alpha > 1.$$

Determinar, en función del parámetro α, el número de términos que es necesario sumar para obtener la suma de la serie con un error menor que ε.

30. Comprobar la convergencia de la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1} n}{e^{n^2}}$$

y obtener el valor de su suma con un error menor que 10^{-3}.

$\boxed{31.}$ Dada la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{2n}+1},$$

comprobar que es convergente y dar un valor aproximado de su suma con un error menor que 10^{-2}.

$\boxed{32.}$ Hallar un valor aproximado de la suma de la serie

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$$

con error menor que 10^{-3}.

33. Dada la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{6\cdot 11\cdot 16\cdot \cdots \cdot (5n+1)}$$

demostrar que es convergente y aproximar su suma con error menor que 0.1.

Series de potencias

34. Determinar el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

(1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n$	$\boxed{(2)}$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$	(3) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^n x^n$
(4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!}$	(5) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln^n n x^n$	$\boxed{(6)}$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{2n}$
(7) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$	(8) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n!\, x^n$	(9) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (1+\frac{1}{n})^{n^2} x^n$
$\boxed{(10)}$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (n+2^{-n})x^n$	(11) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n}{2^n} x^n$	(12) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}$
(13) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} x^n$	(14) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2n-1}{3n+1} x^n$	(15) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{2^n}$
(16) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt[n]{n}}$	(17) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} 2^{n-1} x^{2(n-1)}$	(18) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} e^n x^n$
$\boxed{(19)}$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{2^n} x^n$	(20) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$	(21) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$
(22) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^n}$	(23) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n$	(24) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{e^n}$
$\boxed{(25)}$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(x+2)^n}{(n+1)n!}$	(26) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$	$\boxed{(27)}$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

$\boxed{35.}$ Considérese la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3n)}{3^n} x^n$$

a) Determinar el conjunto de puntos en los que la serie es convergente.

b) Calcular la suma de la serie para $x = 1$.

36. Demostrar las siguientes igualdades:

(a) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}$

(b) $a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n, \qquad x \in \mathbb{R},\ a > 0$

(c) $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \qquad x \in (-1,1)$

(d) $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \qquad x \in (-1,1)$

$\boxed{(e)}$ $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad x \in (-1,1).$

(f) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n \qquad x \in (-1,1).$

(g) $\ln|1+x| = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \qquad x \in (-1,1).$

(h) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in \mathbb{R}$

(i) $\operatorname{sen} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{(j)}}$ $\operatorname{sen}^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \qquad x \in \mathbb{R}$

37. Hallar la convergencia y la suma, cuando sea posible, de las series

$$\boxed{\text{(a)}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-1}{n!} x^n \qquad \boxed{\text{(c)}} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n} \qquad \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

38. Determinar el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n}, \qquad a,b>0, \quad a \neq b$$

$\boxed{39.}$ Determinar el radio de convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ y comprobar que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2} = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt \qquad \text{si } |x|<1$$

$\boxed{40.}$ Determinar el desarrollo en serie de potencias de x de las funciones

$$(1) \quad f(x) = \operatorname{arcsen} x \qquad (2) \quad f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \qquad (3) \quad f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$$

41. Considérese la función $f(x) = x\ln(1+x^2)$.

(a) Determinar la serie de Taylor centrada en $x=0$ asociada a f.

(b) Determinar todos los valores de x para los que dicha serie es convergente.

42. Recurriendo a un desarrollo en serie, hallar con un error menor que $\varepsilon = 10^{-3}$ el área limitada por las rectas $x=0$, $x=1$, $y=0$ y la curva $y=e^{-x^2}$.

43. Determinar las series de Taylor de las funciones que se presentan a continuación, en los puntos que se indican.

$$\text{a)} \quad f(x)=\sqrt{x} \quad a=9 \qquad \text{b)} \quad f(x)=\frac{1}{x} \quad a=-1$$

$$\text{c)} \quad f(x)=\operatorname{sen} x \quad a=\pi/6 \qquad \text{d)} \quad f(h)=e^{a+h} \quad h=0$$

44. Verificar los siguientes desarrollos y determinar el radio de convergencia de la serie. En cada caso dar una expresión para el término general de la serie.

$$\boxed{\text{(a)}} \quad \int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\, dt = \frac{1}{2!}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4!}\frac{x^4}{4} + \frac{1}{6!}\frac{x^6}{6} - \cdots \qquad \text{(b)} \quad \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\, dt = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3!}\frac{x^7}{7} + \frac{1}{5!}\frac{x^{11}}{11} - \cdots$$

$\boxed{45.}$ Suponiendo que la serie de McLaurin para la función e^x es válida para números complejos, comprobar que

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

$\boxed{46.}$ Considérese la función $f(x) = \operatorname{arcsen} x$.

(a) Comprobar que

$$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{2} + \frac{1\cdot 3}{2^2\,2!}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\,3!}\frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot (2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

(b) Determinar el radio de convergencia de la serie de Taylor de f.

(c) ¿Cuántos términos es necesario sumar para calcular arcsen(0.2) con un error menor que 10^{-3}?

(d) Calcular, con un error menor que 0.005, la siguiente integral:

$$\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x}\, dx$$

47. Utilizar el desarrollo en serie de potencias de x de la función

$$f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

para dar un valor aproximado de $f(1)$ con un error menor que 10^{-3}.
Indicación: la función $\frac{\operatorname{sen} t}{t}$ no tiene una primitiva expresable en términos de funciones elementales.

$\boxed{48.}$ Utilizar series de potencias para expresar la integral

$$\int_0^{1/2} \ln(1+x^2)\, dx$$

como una serie numérica. Determinar cuántos términos de la serie es preciso sumar para aproximar el valor de la integral con un error menor que 10^{-3}.

49. Consideremos la función $f(x)$ de clase C^∞ en el intervalo $(-1,1)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x^2)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Determinar la serie de Taylor con centro en $x = 0$ asociada a $f(x)$.

(b) Determinar el intervalo de convergencia de dicha serie.

(c) Calcular el número de términos que es suficiente sumar para obtener $f(0'1)$ con error menor que 10^{-5}.