# Hoja de Problemas Tema 2

# (Cálculo Integral)

## Integral de Riemann

1. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua no negativa. Demostrar que

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b].$$

2. Demostrar que:

1. $\dfrac{1}{17} \le \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{1+x^4}\,dx \le \frac{7}{24}$

$\boxed{2.}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx^2}}{1+x}\,dx \le \ln 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3. $\displaystyle\Big|\int_0^1 \frac{\cos(\alpha x)}{1+x}\,dx\Big| \le 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{4.}$ $\dfrac{1}{1+2^n} \le \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{1+x^n} \le \frac{1}{n-1} \quad \forall n > 1$

$\boxed{3.}$ Estudiar la derivabilidad de la función $F(x) = \int_0^x h(t)\,dt$ siendo

$$h(t) = \begin{cases} |t| & \text{si } t < 1 \\ t^2 & \text{si } 1 \le t < 2 \\ \ln t & \text{si } t \ge 2 \end{cases}$$

$\boxed{4.}$ Sea $f$ continua en $[-b,b]$. Demostrar que

1) $\displaystyle\int_{-b}^b f(x)\,dx = 2\int_0^b f(x)\,dx \qquad \text{si } f \text{ es par.}$

2) $\displaystyle\int_{-b}^b f(x)\,dx = 0 \qquad \text{si } f \text{ es impar.}$

5. Sea $f$ continua en $[a,b]$. Demostrar que

1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx,$

$\boxed{2)}$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f(\frac{x}{k})\,dx$

3) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)\,dx$

4) $\displaystyle\int_a^b f(c-x)\,dx = \int_{c-b}^{c-a} f(x)\,dx$

6. Encontrar una función $f$ y un valor $c$ tal que

$$\int_c^x f(t)dt = \cos x - \frac{1}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\boxed{7.}$ Calcular el polinomio de MacLaurin de grado dos de la función

$$f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1 + \operatorname{sen} t}{2 + t^2}\, dt$$

8. Calcular $f'(x)$ para las siguientes funciones:

$$1) \quad f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \qquad 2) \quad f(x) = \int_{-x^2}^{x^2} e^{t^2}\, dt \qquad \boxed{3)} \quad f(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t}{\cos t}\, dt$$

9. Calcular la derivada de la función $f(x) = \int_0^x x^2 \operatorname{sen}(t^2)\, dt$.

10. Calcular la derivada de $F(x) = \int_0^x x f(t)\, dt$.

$\boxed{11.}$ Demostrar que, si $f$ es una función continua, entonces

$$\int_0^x f(u)(x-u)\, du = \int_0^x \left( \int_0^u f(t)\, dt \right) du$$

12. Demostrar que

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n\, dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m\, dx \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

$\boxed{13.}$ Demostrar que

$$F(x) = -1 + \int_0^x e^{t^2}\, dt$$

tiene una única raíz real que se encuentra en el intervalo $[0, 1]$.

14. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

1. $\displaystyle\int\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx$
2. $\displaystyle\int\frac{x^2+2x+2}{x+2}\,dx$
3. $\boxed{3.}$ $\displaystyle\int x\operatorname{arctg}x\,dx$
4. $\boxed{4.}$ $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}\,dx$
5. $\displaystyle\int\frac{1}{9x^2+4}\,dx$
6. $\displaystyle\int e^{\operatorname{arcsen}x}\,dx$
7. $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}\,dx$
8. $\displaystyle\int\ln(a^2+x^2)\,dx$
9. $\boxed{9.}$ $\displaystyle\int\operatorname{sen}(\ln x)\,dx$
10. $\boxed{10.}$ $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{4+9x^2}}\,dx$
11. $\displaystyle\int\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+3}\,dx$
12. $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sen}^2 x}{e^{2x}}\,dx$
13. $\displaystyle\int\frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$
14. $\displaystyle\int\frac{x-1}{3x^2-4x+3}\,dx$
15. $\displaystyle\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx$
16. $\boxed{16.}$ $\displaystyle\int e^{2x}\operatorname{sen}x\,dx$
17. $\displaystyle\int\operatorname{tg}\frac{x}{2}\,dx$
18. $\boxed{18.}$ $\displaystyle\int x^3\operatorname{sen}x\,dx$
19. $\displaystyle\int\operatorname{tg}^2 x\,dx$
20. $\boxed{20.}$ $\displaystyle\int\operatorname{tg}^5 x\sec^2 x\,dx$
21. $\displaystyle\int\ln x\,dx$
22. $\boxed{22.}$ $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\operatorname{sen}x-\cos x}\,dx$
23. $\displaystyle\int\frac{1}{1+\cos(3x)}\,dx$
24. $\displaystyle\int x^3e^{-2x}\,dx$
25. $\displaystyle\int\operatorname{arctg}x\,dx$
26. $\boxed{26.}$ $\displaystyle\int\arccos(2x)\,dx$
27. $\displaystyle\int\cos^2 x\,dx$
28. $\displaystyle\int x^2e^{-3x}\,dx$
29. $\displaystyle\int x\operatorname{arcsen}(x^2)\,dx$
30. $\boxed{30.}$ $\displaystyle\int x^3\ln x\,dx$
31. $\boxed{31.}$ $\displaystyle\int\frac{1}{e^x+1}\,dx$
32. $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x}\,dx$
33. $\displaystyle\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

15. Encontrar una fórmula de reducción para la integral

$$I_n=\int\frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

y como aplicación calcular

$$I_4=\int\frac{x^4}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$\boxed{16.}$ Sea $I_n=\int\operatorname{tg}^n x\,dx$. Calcular $I_2$, $I_3$, $I_4$ e $I_5$. Dar una fórmula general para $I_n$.

17. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{1.}$ $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2+x+1}\,dx$ | 2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+6x+5}\,dx$ | 3. $\displaystyle\int \sqrt{4x^2+12x+5}\,dx$ |
| 4. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+3\cos x}$ | $\boxed{5.}$ $\displaystyle\int \frac{x^4-2x+1}{x^3+2x^2+x}\,dx$ | 6. $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$ |
| $\boxed{7.}$ $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$ | 8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^4+1)}$ | 9. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx$ |
| $\boxed{10.}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1}$ | 11. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$ | $\boxed{12.}$ $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^3-x^2+x-1}\,dx$ |
| $\boxed{13.}$ $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3-6x^2+12x-8}\,dx$ | $\boxed{14.}$ $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4-2x-x^2}}\,dx$ | $\boxed{15.}$ $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$ |
| $\boxed{16.}$ $\displaystyle\int x^2\sqrt{9x^2-24x+25}\,dx$ | $\boxed{17.}$ $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx$ | 18. $\displaystyle\int \frac{x}{(1-x)^3}\,dx$ |
| $\boxed{19.}$ $\displaystyle\int \sqrt{x^2+9}\,dx$ | 20. $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x^2+2x+1}\,dx$ | $\boxed{21.}$ $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$ |

## Aplicaciones

18. Hallar el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 2x$ y el eje OX.

19. Hallar el área de la región limitada por la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y el eje OX en $[0, 2\pi]$.

$\boxed{20.}$ Hallar el área limitada por las curvas $x^2 = 4y$ e $y = \frac{1}{x^2+3}$.

21. Hallar el área limitada por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ en $[\frac{\pi}{4}, 5\frac{\pi}{4}]$.

22. Hallar el área limitada por las curvas $y^2 = 1 - x$, $2y = x + 2$.

23. Calcular el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x \ln x$ y $g(x) = 10e^{-x/2}$ entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

$\boxed{24.}$ Calcular el área delimitada por el bucle de la curva $y^2 = x(x-2)^2$.

$\boxed{25.}$ Calcular el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = \frac{x}{x^3-8} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

entre las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

$\boxed{26.}$ Dado un cuadrado de lado $L$, determinar el área de la región formada por los puntos que están más cerca del centro del cuadrado que de sus lados.

## Integrales impropias

27. Para las siguientes integrales impropias, estudiar si son o no convergentes y, en caso afirmativo, calcular su valor:

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{1.}$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ | 2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ | 3. $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ |
| $\boxed{4.}$ $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{(4-x)^3}}$ | 5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx$ | 6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^x\,dx$ |
| $\boxed{7.}$ $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$ | 8. $\displaystyle\int_0^1 x^2\ln x\,dx$ | 9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ |
| $\boxed{10.}$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ | 11. $\displaystyle\int_{-\infty}^6 \frac{dx}{(4-x)^2}\,dx$ | $\boxed{12.}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ |
| $\boxed{13.}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ | 14. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+4x^2}$ | 15. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$ |
| $\boxed{16.}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3e^{-x}\,dx$ | $\boxed{17.}$ $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx$ | $\boxed{18.}$ $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$ |

28. Utilizar el criterio de comparación en el límite para estudiar la convergencia de estas integrales impropias:

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{1.}$ $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}}dx$ | $\boxed{2.}$ $\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)}{e^{\operatorname{sen} x}-1}$ | 3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}-\operatorname{sen} x}\,dx$ |
| 4. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\,dx$ | $\boxed{5.}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\,dx$ | 6. $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}\,dx$ |

29. Estudiar si el siguiente cálculo es correcto o no:

$$\int_{-2}^{1} x^{-5/3}\,dx = \frac{x^{-2/3}}{-2/3}\Big|_{-1}^{2}$$

30. Supongamos que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Demostrar que si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\ell = 0$.

$\boxed{31.}$ Dada una función $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, se define su *transformada de Laplace* como

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

si dicha integral es convergente.

(a) Calcular la transformada de Laplace de las funciones $\cos(\omega t)$, $\operatorname{sen}(\omega t)$ y $t^n$.

(b) Demostrar que, si $f$ es continua a trozos en $[0,+\infty)$ y existen $M, T, c > 0$, tales que $|f(t)| \le Me^{ct}$, entonces existe $\mathcal{L}\{f\}$ para $s > c$.

(c) Demostrar que, si $f$ y sus $n$ primeras derivadas verifican las hipótesis del apartado anterior, entonces

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n \mathcal{L}\{f\}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)$$

(Indicación: utilizar inducción e integración por partes.)

$\boxed{32.}$ La función $\Gamma$ (Gamma) de Euler está definida por la expresión

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1}\, dx$$

(a) Determinar el dominio de definición de $\Gamma$ (es decir, para qué valores de $p$ la integral es convergente).

(b) Demostrar que $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$ para $p > 0$.

(c) Demostrar que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{N}$.