Hoja de Problemas Tema 1

(Cálculo Diferencial)

1. Hallar el supremo y el ínfimo de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$\boxed{1.}$	$\{2, 2'2, 2'22, 2'222, \ldots\}$	2.	$\{x \mid x^2 + 5x + 6 \leq 0\}$
$\boxed{3.}$	$\{(-1)^n + \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$	4.	$\{r \in \mathbb{Q} \mid 2r^3 - 1 < 15\}$
5.	$\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid x^2 + x < 2\}$	6.	$\{2^{-p} + 3^{-q} + 5^{-r} \mid p, q, r \in \mathbb{N}\}$

2. Demostrar que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $0 < x < y$ se cumple que $x < \frac{2xy}{x+y} < \frac{x+y}{2} < y$.

3. Demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\left| \frac{1}{|x^2+3|} + \frac{1}{|x|+6} \right| \leq \frac{1}{2}$.

4. Hallar los números reales x que verifican:

1.	$\dfrac{(x+3)(x-4)}{x^3 - 2x^2 - 3x} < 0$	2.	$\lvert 3x - 1\rvert > \lvert 2x - 4\rvert$
3.	$(x-2)^2 \geq 1$	4.	$\lvert\lvert x-1\rvert - \lvert x+1\rvert\rvert \leq 1$
5.	$\left\lvert \dfrac{x}{2+x} \right\rvert < 1$	6.	$\left\lvert \dfrac{2-3x}{1+2x} \right\rvert \leq 4$

5. Demostrar que, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica

$$|x - y| \geq \big|\, |x| - |y| \,\big|$$

6. Dibujar el conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x - y| + |x| - |y| \leq 2\}.$$

7. Resolver la desigualdad $|x+1| + |x-2| < 7$ y dibujar la gráfica de la función $f(x) = |x+1| + |x-2|$.

8. Determinar analítica y gráficamente los dominios de las funciones:

1.	$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$	$\boxed{2.}$	$f(x) = \sqrt{1 - 2\sqrt{1 - x^2}}$	3.	$f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$
4.	$f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$	5.	$f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+2}$	6.	$f(x) = \ln(x+2) + \ln(x-2)$

9. Bosquejar la gráfica de las siguientes funciones:

1.	$f(x) = 1$	2.	$f(x) = 2x + 1$	3.	$f(x) = \dfrac{x}{2}$
4.	$f(x) = -\dfrac{x}{2} - 3$	5.	$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$	6.	$f(x) = 3 \operatorname{sen} 2x$
7.	$f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$	8.	$f(x) = 1 - \cos x$	9.	$f(x) = \tan \dfrac{x}{2}$
10.	$f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x}$	11.	$f(x) = \ln(2x + 1)$	12.	$f(x) = 3e^{2x+1}$

10. Estudiar la paridad de las siguientes funciones :

    1. $f(x) = 3x - x^3$ 2. $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ 3. $f(x) = \log(\dfrac{1-x}{1+x})$ 4.$f(x) = e^{-x^3}$

11. Sean $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$ y $h(x) = \operatorname{sen} x$. Escribir la expresión explícita de las funciones $f \circ g, f \circ g \circ h$ y $f \circ h + h \circ g$.

$\boxed{12.}$ Sean $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$ y $h(x) = \operatorname{sen} x$. Escribir como composición de f, g y h las funciones

a) $y = \operatorname{sen}^2 x$ b) $y = \operatorname{sen}(2^x + 2^{x^2})$ c) $y = 2^{\operatorname{sen}^2 x}$

13. Para cada una de las siguientes funciones, determinar una función inversa, especificando los dominios de f y de f^{-1}.

1.	$f(x) = 2x + 3$	2.	$f(x) = x^2$	3.	$f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$
4.	$f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	5.	$f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\boxed{6.}$	$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 3x + 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

14. Demostrar, aplicando la definición de límite, que $\lim_{x \to 1} ax = a$, donde $a \in \mathbb{R}$.

15. Para cada uno de los siguientes límites, determinar su valor, y comprobar que el resultado verifica la definición $\varepsilon - \delta$ de límite.

1.	$\displaystyle\lim_{x \to a} x^2$	2.	$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
3.	$\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$	$\boxed{4.}$	$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$

$\boxed{16.}$ Calcular

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{E[x]},$$

donde $E[x]$ denota la *parte entera* de x y verificar el resultado utilizando la definición de límite.

$\boxed{17.}$ Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{|10x-1|-|10x+1|}{x}.$$

18. Estudiar la continuidad de las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \\ x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

19. Encontrar una función f que sea discontinua en todo punto y tal que f^2 sea continua en todo punto.

20. Sean f y g dos funciones.

    a) Si no existen ni $\lim_{x\to p} f(x)$ ni $\lim_{x\to p} g(x)$, ¿pueden existir $\lim_{x\to p}(f(x)+g(x))$ y $\lim_{x\to p}(f(x)g(x))$?
    b) Si existe $\lim_{x\to p} f(x)$ y no existe $\lim_{x\to p} g(x)$, ¿puede existir $\lim_{x\to p}(f(x)+g(x))$?
    c) Si existe $\lim_{x\to p} f(x)$ y $\lim_{x\to p}(f(x)+g(x))$, ¿debe existir $\lim_{x\to p} g(x)$?
    d) Si existe $\lim_{x\to p} f(x)$ y $\lim_{x\to p}(f(x)g(x))$, ¿debe existir $\lim_{x\to p} g(x)$?

$\boxed{21.}$ Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ entonces f está acotada. ¿Es cierto el recíproco?

22. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones, indicando en cada caso los tipos de discontinuidad que presentan. En el caso de discontinuidades evitables, determinar cómo debe definirse la función para extenderla de manera continua:

1.	$f(x) = \lvert x-a\rvert \quad a \in \mathbb{R}$	2.	$f(x) = E\left[\dfrac{1}{x}\right]$
3.	$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$	4.	$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 2-x & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$
5.	$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	$\boxed{6.}$	$f(x) = \dfrac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}$
7.	$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{\lvert x\rvert} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$	8.	$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ a+x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
$\boxed{9.}$	$f(x) = x^x \qquad x \geq 0$	$\boxed{10.}$	$f(x) = \dfrac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x^2}}$

$\boxed{23.}$ Sea f una función continua en $x=0$ que verifica $f(x+y) = f(x)+f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es continua en todo $\mathbb{R}$.

24. Construir una función real continua en todo punto del intervalo $[-1,1]$ salvo en el 0, que tome valores de distinto signo en -1 y 1 y que no se anule en ningún punto.

25. Demostrar que toda función polinómica de coeficientes reales y de grado impar se anula en algún punto de la recta real. Mostrar con un ejemplo que esto no ocurre en general si el grado es par.

26. Demostrar que existe algún $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} x = x - 1$.

27. Estudiar las derivadas por la derecha y por la izquierda en $x_0 = 0$ de las funciones:

$$\text{a)} \quad y = |x| \qquad\qquad \text{b)} \quad y = x^{\frac{1}{n}} \quad n \geq 2$$

28. Estudiar las derivadas laterales en $x_0 = 0$ de la función $f(x) = (x^3 + x^2)^{\frac{1}{2}}$. ¿Es f continua en $x_0 = 0$?

29. Calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3+x)^2 - \operatorname{sen} 9}{x}.$$

30. Demostrar que, si f es derivable en a, entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = 2f'(a).$$

Considerando la función $f(x) = |x|$, comprobar que el límite anterior puede existir sin que la función sea derivable en a.

$\boxed{31.}$ Sea $f(x) = (x-a)g(x)$, donde g es una función continua en a. Discutir si existe $f'(a)$ y, en caso de que exista, calcular su valor.

32. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = x - E[x]$, siendo $E[x]$ la función parte entera de x.

33. Estudiar la continuidad y derivabilidad de las funciones

$$\text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad\qquad \text{b)} \quad f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 3x - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

34. Estudiar la continuidad y derivabilidad en $x = 0$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Dibujar su gráfica en un entorno del origen.

$\boxed{35.}$ Se define la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Calcular $f'(x)$.

b) Estudiar la continuidad de f' en $x = 0$.

c) ¿Qué puede afirmarse sobre la existencia de la función f''?

$\boxed{36.}$ Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(0) = g'(0) = 0$ y sea

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Calcular $f'(0)$.

$\boxed{37.}$ Sea $f(x) = |x|^3$. Demostrar que existen la primera y segunda derivada para todo valor de x, y que la tercera derivada existe en todos los puntos salvo en $x = 0$.

$\boxed{38.}$ Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \operatorname{tg} x$ en el punto $\frac{\pi}{4}$.

39. Hallar en qué puntos la tangente a la curva $y = x^3 + 5$ es:

a) Paralela a la recta $12x - y = 17$.

b) Perpendicular a la recta $x + 3y = 2$.

40. ¿Para qué valores de a la parábola $y = ax^2$ es tangente a la curva $y = \ln x$?

$\boxed{41.}$ El ángulo entre dos curvas C_1 y C_2 en un punto de intersección P se define como el ángulo que forman las rectas tangentes a las curvas en P. Determinar el ángulo de corte de las curvas $y = x^2$, $y = (x - 2)^2$.

42. Se sabe que una circunferencia C de radio 1 tiene su centro en el eje OY y es tangente a la parábola $y = x^2$. Determinar el centro de la circunferencia.

43. Demostrar que $f(x) = x^3$ es derivable en $x = 1$ y $x = 3$. Calcular df e Δy en dichos puntos cuando $\Delta x = 0,1$.

44. Utilizando la diferencial, aproximar el valor de la función $f(x) = \sqrt[3]{\frac{27+x}{27-x}}$ en el punto $x = 0,12$.

$\boxed{45.}$ Calcular la derivada de las siguientes funciones:

1.	$f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$	2.	$f(x) = x^x$
3.	$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$	4.	$f(x) = \operatorname{arctg}(\dfrac{1+x}{1-x})$
5.	$f(x) = e^{e^x}$	6.	$f(x) = x^{\operatorname{arcsen} x}, \quad x > 0$

46. Demostrar que:

a) $(\operatorname{sen} x)^{(n)} = \operatorname{sen}(x + n\dfrac{\pi}{2})$ b) $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\dfrac{\pi}{2})$

47. Calcular la derivada n-ésima de las siguientes funciones:

1.	$f(x) = e^{mx}$	2.	$f(x) = \dfrac{1}{x-a}$
$\boxed{3.}$	$f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$	4.	$f(x) = \ln(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$

48. Se considera la función real $f(x) = x^n(1-x)^m + 1$. Aplicar el teorema de Rolle para demostrar (sin calcular la derivada) que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(0, 1)$.

49. Determinar los valores del número real k para los cuales la función $p(x) = x^3 - 3x + k$ se anula en algún punto de $[-1, 1]$.

$\boxed{50.}$ Aplicar el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación cúbica $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$.

51. Sea $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$. Probar que $f(1) = f(-1) = 0$, y que $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in [-1, 1]$. Explicar por qué este resultado no contradice el teorema de Rolle.

52. Sea f una función real derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y tal que $f(0) = 0$ y $|f'(x)| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que $|f(x)| < |x|$ para todo $x \neq 0$.

53. Sea $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ con $a_i \in \mathbb{R}$. Demostrar que si $a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ entonces la ecuación $p(x) = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(0, 1)$.

54. Probar que $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ tiene exactamente dos soluciones reales.

$\boxed{55.}$ Demostrar que la ecuación $x^3 + 9x^2 + 33x - 8 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

56. Demostrar las siguientes desigualdades utilizando el teorema del valor medio:

   a) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

   b) $1 - \frac{a}{b} \leq \ln \frac{b}{a} \leq \frac{b}{a} - 1$ con $0 < a \leq b$.

   $\boxed{\text{c)}}$ $nx^{n-1}(y - x) \leq y^n - x^n \leq ny^{n-1}(y - x)$ si $0 < x \leq y$, $n = 1, 2, \ldots$

   d) $\frac{1}{\cos^2 a} \leq \frac{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a}{b - a} \leq \frac{1}{\cos^2 b}$ con $0 < a \leq b \leq \frac{\pi}{2}$.

57. Demostrar que $(1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$ para todo $x \geq 0$, $\alpha \in (0, 1)$.

$\boxed{58.}$ Utilizando el Teorema del Valor Medio, demostrar que

$$\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}$$

$\boxed{59.}$ Sean f y g funciones derivables en $\mathbb{R}$. Demostrar que si $f(a) = g(a)$ y $f'(x) > g'(x)$ para todo $x > a$, entonces $f(x) > g(x)$ para todo $x > a$.

60. Sea f una función continua en $[0, 1]$ y derivable en $(0, 1)$ tal que $f(0) = 0$ y f' es creciente en $(0, 1)$. Demostrar que la función $g(x) = f(x)/x$ es creciente en $(0, 1)$.

$\boxed{61.}$ Encontrar una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = -1, f(4) = 7$ y $f'(x) > 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, o demostrar que tal función no puede existir.

62. Demostrar que no puede existir una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) > 0, \quad f'(x) < 0, \quad f''(x) < 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

63. Sea $f : I = (a, b) \to \mathbb{R}$ una función derivable en I tal que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ para todo $x, y \in I \subset \mathbb{R}$. Demostrar que f es constante en I.

64. Comprobar que $g(x) = 2 \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcsen} \frac{2x}{1+x^2}$, $x \in [1, \infty)$, es una función constante y hallar el valor de ésta.

65. Una señal ha de ser transmitida de A a B a través de un punto P situado en la línea de tierra. ¿Dónde se situará este punto para que la distancia recorrida por la señal sea mínima?

66. Obtener el desarrollo de MacLaurin de orden n, con resto de Lagrange, de las siguientes funciones:

1. $f(x) = e^x$	2. $f(x) = \operatorname{sen} x$	$\boxed{3.}$ $f(x) = \operatorname{Cosh} x$
4. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$	5. $f(x) = \operatorname{arctg} x$	6. $f(x) = \ln(1 + x)$

67. Aproximar la función $f(x) = \ln^2(1 + x)$ utilizando el polinomio de Taylor de grado 3 alrededor del punto $x_0 = 0$ y dar una cota del error cometido en el intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

$\boxed{68.}$ Aproximar la función $y = \operatorname{sen}(x^2)$ utilizando el polinomio de McLaurin de grado 6 y dar una cota del error cometido en el intervalo $(-1, 1)$.

69. Comprobar las siguientes igualdades:

1. $a^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\ln^k a}{k!} x^k + o(x^n)$	2. $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$
$\boxed{3.}$ $\dfrac{x}{1-x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$	$\boxed{4.}$ $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$
5. $\dfrac{1}{2-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{2^{k+1}} + o(x^n)$	6. $(1+x)^a = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k + o(x^n)$
7. $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$	8. $\operatorname{arctg} x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$

70. Escribir el desarrollo limitado en el origen hasta el orden 3 de las funciones:

1. $f(x) = (1+x)^x$ $\quad\boxed{2.}$ $f(x) = (1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2}}$ $\quad$ 3. $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > -1 \text{ y } x \neq 0 \\ e & \text{si } x = 0 \end{cases}$

71. Utilizar el desarrollo de Taylor de orden 2 de la función $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ para calcular de manera aproximada $(1,03)^{\frac{1}{3}}$ y acotar el error cometido.

$\boxed{72.}$ Calcular aproximadamente $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ con un error menor que $0,0001$.

73. Determinar en qué intervalo del punto $x = 25$ podemos aproximar la función $f(x) = \sqrt{x}$ utilizando su polinomio de Taylor de grado 3, si queremos que el error cometido sea menor que 10^{-3}.

$\boxed{74.}$ Utilizar el polinomio de Taylor de grado 2 para calcular un valor aproximado de $\sqrt[3]{70}$ y dar una cota superior del error cometido en dicha aproximación.

75. El método de Newton para aproximar una raíz r de la ecuación $f(x) = 0$ consiste en, a partir de un cierto $c \in \mathbb{R}$, obtener la sucesión

$$\begin{cases} x_0 & = & c \\ x_{n+1} & = & x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Utilizar la fórmula de Taylor de primer orden alrededor del punto x_n con $x = r$ para demostrar que, si existe $f''(x)$ en un intervalo I que contiene a r, x_n y x_{n+1} y, además, $|f''(x)| \leq M$ y $|f'(x)| \geq K$ para todo $x \in I$, entonces

$$|x_{n+1} - r| \leq \frac{M}{2K}|x_n - r|^2$$

76. Calcular los siguientes límites:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^3)}{x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{sen} x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 + \operatorname{sen} x - e^x}{\operatorname{arctg}^2 x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to n} E[x]$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - 1)}{x^2 - 1}$
6. $\boxed{6.}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos(1/x)$
8. $\boxed{8.}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$
9. $\boxed{9.}$ $\displaystyle\lim_{x\to \infty} (\sqrt[3]{x^3 + ax^2} - \sqrt[3]{x^3 - ax^2})$
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2})$
11. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{1-\ln x}}$
13. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{sen} 2x}$
14. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{1 - e^{2\sqrt{x}}}$

$\boxed{77.}$ Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \tan(x^2) - x^2 \operatorname{sen} x}{1 - \sqrt{1 - 3x^5}}$$

78. Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{arcsen} x}$$

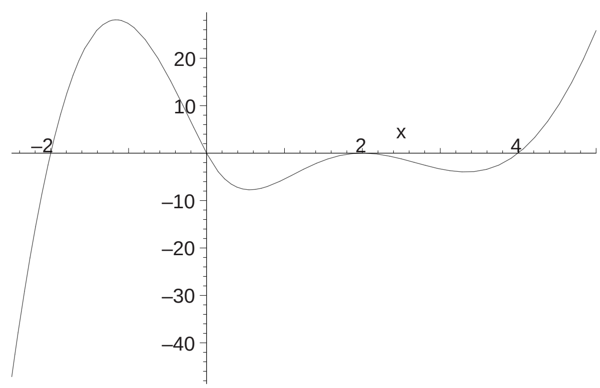
79. Representar las gráficas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1}$
2. $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+3)}$
3. $f(x) = \sqrt{\dfrac{9x^3}{x-1}}$
4. $f(x) = e^x\sqrt{2x^2 - 4x}$

$\boxed{5.}$ $f(x) = \dfrac{|x|}{e^{|x-1|}}$

$\boxed{6.}$ $f(x) = x^{-1}\ln x$

$\boxed{80.}$ La siguiente figura muestra la gráfica de la derivada f' de una cierta función f.



a) ¿En qué intervalos es f creciente o decreciente?

b) ¿Para qué valores alcanza f un máximo o mínimo local?

c) Esbozar la gráfica de f''.

d) Esbozar una posible gráfica de f.

81. Estudiar si las siguientes funciones están acotadas superior e inferiormente (en los intervalos indicados) y, si es posible, calcular sus valores máximo y mínimo:

1. $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \quad x \in (0, \pi)$
2. $f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$
3. $f(x) = x^2, \quad x \geq 0$
4. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq a \\ a+2 & \text{si } x > a \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$

$\boxed{5.}$ $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R}$

$\boxed{6.}$ $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{x-1}, \quad x \in [2, +\infty)$

82. Sea $f(x) = \sqrt{|x^3 - x|}$. Determinar el máximo y mínimo absolutos de f en el intervalo $[0, 2]$.

83. Un alambre de longitud 1 se corta en dos trozos de longitud a y b. Con el primero se forma un cuadrado y con el segundo una circunferencia. Determinar para qué valores de a y de b la suma de las áreas es máxima y para qué valores es mínima.

84. Calcular $a, b, c \in \mathbb{R}$ de manera que la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ pase por el punto $(1, 1)$, f alcance un mínimo local en dicho punto y la tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

85. Determinar a, b, c, d de modo que la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ presente un máximo y un mínimo en $(0, 4)$ y $(2, 0)$, respectivamente.

86. Entre todos los rectángulos de área dada A, ¿cuál es el de menor perímetro?

87. Entre todos los rectángulos de perímetro dado P, ¿cuál es el de mayor área?

88. Obtener, para $x \in [-2, 2]$, el menor y mayor valor de la distancia entre el punto $(0, 1)$ y la parábola $y = x^2$.

89. Con una cartulina de 60 cm. de lado se desea construir una caja de base cuadrada (sin tapa) que tenga la máxima capacidad posible. Determinar las medidas de dicha caja.

90. De entre todas las latas cilíndricas (con tapa) de un litro de capacidad, determinar las dimensiones de la que utiliza menos material en su fabricación.